Fourierova transformace, konvoluce a Parsevalova rovnost

V následujícím textu přepisujeme vztahy z rukopisu a doplňujeme vysvětlení. Pro odvození můžeme nejprve předpokládat, že $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (Schwartzův prostor). Všechny použité integrály a záměny pořadí integrace pak mají standardní opodstatnění. Výsledné rovnosti lze rozšířit na $L^2(\mathbb{R})$.

Fourierova transformace

Dvě transformace s opačnými znaménky v exponentu definujeme takto:

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i \nu t}\, dt, \qquad \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt, \tag{1}$$

$$\check{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{+2\pi i \nu t}\, dt. \tag{2}$$

Komentář. Symbol $\check{f}$ označuje transformaci s kladným znaménkem v exponentu (při této normalizaci také inverzní Fourierovu transformaci). Pro $\nu = 0$ se exponenciální faktor rovná jedné.

Převrácení argumentu a konvoluce

Zavedeme funkci

$$g_-(x) = g(-x). \tag{3}$$

Konvoluci definujeme vztahem

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x - y)\, dy. \tag{4}$$

V bodě $x = 0$ pro konvoluci s převrácenou funkcí platí

$$(f * g_-)(0) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g_-(-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(y)\, dy. \tag{5}$$

Komentář. Poslední rovnost plyne z $g_-(-y) = g(y)$. Pro komplexní skalární součin použijeme $\overline{g_-}$, aby se ve výsledku objevilo $\overline{g(y)}$.

Komplexní sdružení a Fourierova transformace

Platí

$$\widehat{\overline{f}}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} e^{-2\pi i \nu t}\, dt \tag{6}$$

$$= \overline{\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{+2\pi i \nu t}\, dt} = \overline{\check{f}(\nu)}. \tag{7}$$

Analogicky

$$\check{\overline{f}}(\nu) = \overline{\widehat{f}(\nu)}. \tag{8}$$

A protože

$$\widehat{g_-}(\nu) = \check{g}(\nu), \tag{9}$$

dostáváme kombinací těchto dvou pravidel

$$\widehat{\overline{g}_-}(\nu) = \overline{\widehat{g}(\nu)}. \tag{10}$$

Komentář. Komplexní sdružení mění znaménko imaginární jednotky v exponentu. Převrácení argumentu je možné ověřit substitucí $u = -t$.

Parsevalova rovnost (Plancherelova identita)

Věta o Fourierově transformaci konvoluce dává

$$\widehat{f * \overline{g}_-}(\nu) = \widehat{f}(\nu)\,\widehat{\overline{g}_-}(\nu) = \widehat{f}(\nu)\,\overline{\widehat{g}(\nu)}. \tag{11}$$

Po integraci přes ν a použití inverzního Fourierova vzorce v bodě nula získáme

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu)\overline{\widehat{g}(\nu)}\,d\nu &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f * \overline{g}_-}(\nu)\,d\nu && (12)\\ &= (f * \overline{g}_-)(0) && (13)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}\,dt. && (14) \end{aligned}$$

Komentář. Ve druhém kroku používáme Fourierovu inverzi, konkrétně $h(0) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(\nu)\,d\nu$ pro $h = f * \overline{g}_-$. V posledním kroku dosadíme definici konvoluce. Rovnost říká, že Fourierova transformace zachovává skalární součin.

Pro $g = f$ dostáváme zvlášť

$$\boxed{\|\widehat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\nu)|^2\,d\nu = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,dt = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.} \tag{15}$$

Komentář. Jde o Plancherelovu identitu: s uvedenou normalizací je Fourierova transformace izometrií na $L^2(\mathbb{R})$.