

# Význam výpočtu: konvoluční věta pro diskrétní Fourierovu transformaci

## 1 Základní význam výpočtu

Výpočet představuje důkaz **konvoluční věty pro diskrétní Fourierovu transformaci (DFT)**. Ukazuje, že **konvoluce dvou posloupností v původní oblasti se po Fourierově transformaci změnila na obyčejné násobení jejich Fourierových obrazů**.

Výsledný vztah má tvar

$$\widehat{a * b}_m = \hat{a}_m \hat{b}_m$$

nebo ekvivalentně

$$\mathcal{F}(a * b) = \mathcal{F}(a)\mathcal{F}(b).$$

## 2 Definice diskrétní Fourierovy transformace

Nejprve je zavedena komplexní  $N$ -tá odmocnina z jedničky

$$\omega = e^{-i\frac{2\pi}{N}}.$$

Tato veličina tvoří základ diskrétní Fourierovy transformace.

Fourierova transformace posloupnosti  $a_k$  je definována jako

$$\hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k a_k \omega^{mk},$$

a obdobně pro posloupnost  $b_k$

$$\hat{b}_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k b_k \omega^{mk}.$$

Symbol  $\hat{a}_m$  tedy označuje  $m$ -tou Fourierovu složku posloupnosti  $a$ .

## 3 Definice konvoluce

Konvoluce dvou posloupností  $a$  a  $b$  je definována vztahem

$$(a * b)_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k a_k b_{n-k}.$$

Konvoluce vytváří z původních dvou posloupností novou posloupnost.

## 4 Cíl důkazu

Cílem výpočtu je ukázat, že Fourierova transformace konvoluce je rovna součinu Fourierových transformací jednotlivých posloupností:

$$\widehat{a * b}_m = \hat{a}_m \hat{b}_m.$$

## 5 Postup výpočtu

Začneme Fourierovou transformací konvoluce:

$$\widehat{a * b}_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k (a * b)_k \omega^{mk}.$$

Do tohoto vztahu dosadíme definici konvoluce:

$$\widehat{a * b}_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j a_j b_{k-j} \right) \omega^{mk}.$$

Po změně pořadí sum dostaneme

$$\widehat{a * b}_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j a_j \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k b_{k-j} \omega^{mk}.$$

### 5.1 Změna indexu

Provedeme substituci

$$r = k - j, \quad k = r + j.$$

Potom platí

$$\omega^{mk} = \omega^{m(r+j)} = \omega^{mr} \omega^{mj}.$$

Výraz lze tedy zapsat jako

$$\widehat{a * b}_m = \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j a_j \omega^{mj} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_r b_r \omega^{mr} \right).$$

První závorka je podle definice

$$\hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j a_j \omega^{mj},$$

zatímco druhá závorka je

$$\hat{b}_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_r b_r \omega^{mr}.$$

Proto dostáváme

$$\widehat{a * b}_m = \hat{a}_m \hat{b}_m.$$

## 6 Praktický význam

Význam konvoluční věty spočívá v tom, že konvoluce může být výpočetně náročná, zatímco násobení jednotlivých Fourierových složek je jednoduché.

Místo přímého výpočtu

$$a * b$$

lze nejprve provést Fourierovu transformaci:

$$a \xrightarrow{\text{DFT}} \hat{a}, \quad b \xrightarrow{\text{DFT}} \hat{b}.$$

Ve Fourierově oblasti se potom jednotlivé složky pouze vynásobí:

$$\hat{c}_m = \hat{a}_m \hat{b}_m.$$

Nakonec se provede inverzní Fourierova transformace:

$$c = \mathcal{F}^{-1}(\hat{c}).$$

Při použití rychlé Fourierovy transformace (FFT) lze tímto způsobem konvoluci počítat velmi efektivně.

## 7 Použití

Konvoluční věta má význam například při:

- filtraci signálů,
- zpracování obrazu,
- výpočtu korelace,
- numerickém řešení některých diferenciálních rovnic,
- analýze diskrétních signálů,
- rychlém výpočtu konvoluce dlouhých posloupností.

## 8 Shrnutí

Celý výpočet dokazuje vztah

$$\boxed{\mathcal{F}(a * b) = \mathcal{F}(a)\mathcal{F}(b)}$$

tedy skutečnost, že **konvoluce v původní oblasti odpovídá násobení ve Fourierově oblasti**.