

Fourierova transformace konvoluce

Cílem výpočtu je ukázat jednu ze základních vlastností Fourierovy transformace:

$$\widehat{f * g}(\nu) = \widehat{f}(\nu) \widehat{g}(\nu)$$

tedy že *Fourierova transformace konvoluce dvou funkcí je rovna součinu jejich Fourierových transformací*.

Tato vlastnost se nazývá *konvoluční věta*.

1. Definice Fourierovy transformace

Používáme definici Fourierovy transformace

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt.$$

Jednotlivé symboly mají následující význam:

- $f(t)$ je původní funkce v proměnné t ,
- $\widehat{f}(\nu)$ je její Fourierova transformace,
- ν je frekvence,
- i je imaginární jednotka, tedy

$$i^2 = -1,$$

- výraz

$$e^{-i2\pi\nu t}$$

představuje komplexní harmonickou funkci, pomocí níž se zjišťuje, jaké frekvenční složky jsou ve funkci $f(t)$ obsaženy.

Stejným způsobem definujeme

$$\widehat{g}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-i2\pi\nu t} dt.$$

2. Definice konvoluce

Konvoluce funkcí f a g je definována jako

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(t - y) dy.$$

Proměnná y je zde pouze integrační proměnná.

Výraz

$$g(t - y)$$

znamená posunutou verzi funkce g .

Konvoluce tedy pro každou hodnotu t kombinuje hodnoty funkcí f a g přes všechny možné posuny y .

3. Co chceme dokázat

Chceme ukázat, že

$$\widehat{f * g}(\nu) = \widehat{f}(\nu)\widehat{g}(\nu).$$

Označme levou stranu jako

$$L = \widehat{f * g}(\nu).$$

Na konci výpočtu chceme dostat pravou stranu

$$R = \widehat{f}(\nu)\widehat{g}(\nu).$$

Budeme tedy dokazovat

$$L = R.$$

4. Dosazení definice Fourierovy transformace

Začneme výrazem

$$L = \widehat{f * g}(\nu).$$

Podle definice Fourierovy transformace platí

$$\widehat{f * g}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} (f * g)(t) e^{-i2\pi\nu t} dt.$$

Dosadíme definici konvoluce

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(t - y) dy.$$

Dostaneme

$$L = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(y)g(t - y) dy \right] e^{-i2\pi\nu t} dt.$$

Po rozepsání lze psát

$$L = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y)g(t - y) e^{-i2\pi\nu t} dy dt.$$

Máme tedy dvojný integrál přes proměnné y a t .

5. Záměna pořadí integrace

Za vhodných předpokladů na funkce f a g můžeme zaměnit pořadí integrace:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\dots) dy dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\dots) dt dy.$$

Dostáváme proto

$$L = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y)g(t - y) e^{-i2\pi\nu t} dt dy.$$

Protože $f(y)$ nezávisí na proměnné t , můžeme jej vytknout před vnitřní integrál:

$$L = \int_{\mathbb{R}} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}} g(t - y) e^{-i2\pi\nu t} dt \right] dy.$$

Právě vnitřní integrál nyní upravíme substitucí.

6. Substituce $\tau = t - y$

Zavedeme novou proměnnou

$$\tau = t - y.$$

Odtud

$$t = \tau + y.$$

Protože y je při integraci podle t konstantní, platí

$$dt = d\tau.$$

Dosadíme do vnitřního integrálu:

$$g(t - y) = g(\tau)$$

a

$$e^{-i2\pi\nu t} = e^{-i2\pi\nu(\tau+y)}.$$

Tedy

$$L = \int_{\mathbb{R}} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}} g(\tau) e^{-i2\pi\nu(\tau+y)} d\tau \right] dy.$$

7. Rozdělení exponenciály

Použijeme vztah

$$e^{a+b} = e^a e^b.$$

Proto

$$e^{-i2\pi\nu(\tau+y)} = e^{-i2\pi\nu\tau} e^{-i2\pi\nu y}.$$

Dostáváme

$$L = \int_{\mathbb{R}} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}} g(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} e^{-i2\pi\nu y} d\tau \right] dy.$$

Činitel

$$e^{-i2\pi\nu y}$$

nezávisí na τ , takže jej můžeme vytknout před vnitřní integrál:

$$L = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i2\pi\nu y} \left[\int_{\mathbb{R}} g(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau \right] dy.$$

Vnitřní integrál již vůbec nezávisí na y , proto lze celý výraz rozdělit na součin dvou integrálů:

$$L = \left[\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i2\pi\nu y} dy \right] \left[\int_{\mathbb{R}} g(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau \right].$$

8. Rozpoznání Fourierových transformací

Podle definice Fourierovy transformace je

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i2\pi\nu y} dy = \widehat{f}(\nu).$$

Stejně tak

$$\int_{\mathbb{R}} g(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau = \widehat{g}(\nu).$$

Proto

$$L = \widehat{f}(\nu) \widehat{g}(\nu).$$

Tedy

$$\widehat{f * g}(\nu) = \widehat{f}(\nu) \widehat{g}(\nu)$$

a tím je tvrzení dokázáno.

9. Význam výsledku

Výsledek

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$$

říká, že operace konvoluce v původní proměnné se po Fourierově transformaci změní na obyčejné násobení.

Schematicky:

$$\boxed{\text{konvoluce v časové oblasti} \quad \longleftrightarrow \quad \text{násobení ve frekvenční oblasti}}$$

To je velmi důležité, protože konvoluce je výpočetně složitější než obyčejné násobení. Pokud potřebujeme spočítat

$$f * g,$$

můžeme postupovat takto:

$$f \longrightarrow \widehat{f}, \quad g \longrightarrow \widehat{g},$$

potom ve frekvenční oblasti vypočítáme

$$\widehat{f} \widehat{g},$$

a nakonec provedeme inverzní Fourierovu transformaci:

$$f * g = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \widehat{f} \widehat{g} \right\}.$$

10. Intuitivní interpretace

Představme si, že $f(t)$ je vstupní signál a $g(t)$ popisuje vlastnosti nějakého systému nebo filtru.

Výstup systému může být popsán konvolucí

$$h(t) = (f * g)(t).$$

V časové oblasti musíme počítat integrál

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(t-y) dy.$$

Po Fourierově transformaci však dostaneme pouze

$$\widehat{h}(\nu) = \widehat{f}(\nu)\widehat{g}(\nu).$$

Každá frekvenční složka vstupního signálu se tedy jednoduše násobí odpovídající frekvenční charakteristikou systému.

Proto je Fourierova transformace velmi důležitá například při

- zpracování signálů,
- filtraci,
- zpracování obrazu,
- řešení diferenciálních rovnic,
- analýze lineárních systémů,
- numerických výpočtech pomocí FFT.

11. Nejdůležitější krok důkazu

Klíčovým krokem je substituce

$$\tau = t - y.$$

Ta umožní přepsat exponenciální člen jako

$$e^{-i2\pi\nu t} = e^{-i2\pi\nu(\tau+y)} = e^{-i2\pi\nu\tau} e^{-i2\pi\nu y}.$$

Díky tomu se původní dvojný integrál rozdělí na dva samostatné integrály:

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-i2\pi\nu y} dy$$

a

$$\int_{\mathbb{R}} g(\tau)e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau.$$

Tyto dva integrály jsou právě

$$\widehat{f}(\nu) \quad \text{a} \quad \widehat{g}(\nu).$$

To je důvod, proč se Fourierova transformace konvoluce změní na součin.