

Relace neurčitosti

Cíl:

chceme ukázat, že signál nemůže být přesně lokalizován současně v čase i ve frekvenci, konkrétně

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}$$

Označení:

- Fourierova transformace $\hat{f}(\nu) = \int_R f(t) \exp(-i2\pi\nu t) dt$
- inverzní Fourierova transformace $\check{f}(\nu) = \int_R f(t) \exp(i2\pi\nu t) dt$
- komplexně sdružené číslo z^*
- absolutní hodnota splňuje $|z|^2 = zz^*$
- skalární součin $\langle f, g \rangle = \int_R f(t) g^*(t) dt$
- derivace f'
- střední hodnota času $\bar{t} = \frac{\int_R t |f(t)|^2 dt}{\int_R |f(t)|^2 dt}$
- střední kvadratická hodnota času $\bar{t}^2 = \frac{\int_R t^2 |f(t)|^2 dt}{\int_R |f(t)|^2 dt}$
- střední hodnota frekvence $\bar{\nu} = \frac{\int_R \nu |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu}{\int_R |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu}$
- střední kvadratická hodnota frekvence $\bar{\nu}^2 = \frac{\int_R \nu^2 |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu}{\int_R |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu}$
- rozptyl času $\sigma_t^2 = \bar{t}^2 - (\bar{t})^2$
- rozptyl frekvence $\sigma_\nu^2 = \bar{\nu}^2 - (\bar{\nu})^2$
- úhlová frekvence $\omega = 2\pi\nu$ a její rozptyl $\sigma_\omega = 2\pi\sigma_\nu$

Použijeme:

- $\widetilde{\nu g} = \frac{g'}{i2\pi}$ a opakováním $\widetilde{\nu^2 g} = \frac{g''}{-4\pi^2}$
 Důkaz:

$$\left(\widetilde{f}\right)' = \int_R f(\nu)(i2\pi\nu) \exp(i2\pi\nu t) d\nu = i2\pi\nu \widetilde{f(\nu)}$$
 substitucí $g = \widetilde{f}$ a tedy $f = \widehat{g}$ dostaneme $g' = i2\pi\nu \widetilde{g}$ a tedy $\frac{g'}{i2\pi} = \widetilde{\nu g}$
- $\widehat{g^*} = (\check{g})^*$
 Důkaz:

$$\widehat{g^*} = \int g^* \exp(-i \dots) = \left(\int g \exp(i \dots)\right)^* = (\check{g})^*$$
- $\int \widehat{f} g = \int f \widehat{g}$
 Důkaz:

$$\int \widehat{f} g = \int \left(\int f \exp(i \dots)\right) g = \int f \left(\int g \exp(i \dots)\right) = \int f \widehat{g}$$
- $\langle \widehat{f}, g \rangle = \langle f, \check{g} \rangle$
 Důkaz:

$$\langle \widehat{f}, g \rangle = \int \widehat{f} g^* = \int f \widehat{g^*} = \int f (\check{g})^* = \langle f, \check{g} \rangle$$
- $\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle f, g \rangle$
 odtud okamžitě plyne také

$$\langle \check{f}, \check{g} \rangle = \langle f, g \rangle$$

$$\langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle = \langle f, f \rangle = \langle f, f \rangle$$
 Důkaz:

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle f, \check{g} \rangle = \langle f, g \rangle$$
- $\langle f, f \rangle \langle g, g \rangle \geq |\langle f, g \rangle|^2$ (Cauchyho–Schwarzova nerovnost)
 Důkaz:
 Pro $\langle f, g \rangle = 0$ máme na levé straně nezáporné číslo, na pravé straně nulu, tedy nerovnost platí. Pro $\langle f, g \rangle \neq 0$ hledíme číslo λ takové, aby $z = f - \lambda g$ bylo kolmé na g . Tedy $0 = \langle z, g \rangle = \langle f - \lambda g, g \rangle = 0$

$$\langle f, g \rangle = \lambda \langle g, g \rangle$$

$$\lambda = \frac{\langle f, g \rangle}{\langle g, g \rangle}$$
 Z Pythagorovy věty $\langle f, f \rangle = \langle \lambda g, \lambda g \rangle + \langle z, z \rangle$ máme

$$\langle f, f \rangle \geq \langle \lambda g, \lambda g \rangle = |\lambda|^2 \langle g, g \rangle = \left| \frac{\langle f, g \rangle}{\langle g, g \rangle} \right|^2 \langle g, g \rangle$$
 a tedy

$$\langle f, f \rangle \langle g, g \rangle \geq |\langle f, g \rangle|^2$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat

$$\bar{t} = 0, \bar{\nu} = 0, \int_R |f(t)|^2 dt = \int_R |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu = 1.$$

Potom

$$\sigma_t^2 = \int_R t^2 |f(t)|^2 dt = \langle tf, tf \rangle$$

$$\sigma_\nu^2 = \int_R \nu^2 |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu = \langle \nu \hat{f}, \nu \hat{f} \rangle = \langle \widetilde{\nu \hat{f}}, \widetilde{\nu \hat{f}} \rangle = \langle \frac{f'}{i2\pi}, \frac{f'}{i2\pi} \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \langle f', f' \rangle$$

Takže (užitím Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti)

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = 4\pi^2 \sigma_t^2 \sigma_\nu^2 = \langle tf, tf \rangle \langle f', f' \rangle \geq |\langle tf, f' \rangle|^2$$

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq |\langle tf, f' \rangle|.$$

Upravme (užitím integrace per partes)

$$\begin{aligned} \langle tf, f' \rangle &= \int_R tf(t) f'^*(t) dt = [tf(t) f^*(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_R (tf(t))' f^*(t) dt = \\ &= - \int_R (f(t) f^*(t) + t f'(t) f^*(t)) dt = -1 - \langle tf, f' \rangle^*. \end{aligned}$$

$$\text{Dostali jsme } \langle tf, f' \rangle = -1 - \langle tf, f' \rangle^*,$$

$$\text{tedy } \langle tf, f' \rangle + \langle tf, f' \rangle^* = 2\text{Re}\langle tf, f' \rangle = -1$$

$$\text{takže } \text{Re}\langle tf, f' \rangle = -\frac{1}{2}$$

$$\text{a } |\langle tf, f' \rangle| \geq \frac{1}{2}$$

Takže

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}$$

Odvozený vztah můžeme ilustrovat na třech příkladech.

Příklad 1:

$$f(t) = \exp(-\pi t^2)$$

$$\hat{f}(\nu) = \exp(-\pi \nu^2)$$

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{4\pi}$$

$$\sigma_\nu^2 = \frac{1}{4\pi}$$

$$\sigma_t \sigma_\nu = \frac{1}{4\pi}$$

$$\sigma_t \sigma_\omega = \frac{1}{2}$$

Pro tuto funkci (tzv. Gaussova) nastává minimum součinu $\sigma_t \sigma_\omega$.

Příklad 2:

$$f(t) = \exp(-|t|)$$

$$\hat{f}(\nu) = \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}$$

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_\nu^2 = \frac{1}{4\pi^2}$$

$$\sigma_t \sigma_\nu = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2\pi}$$

$$\sigma_t \sigma_\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2}$$

Pro tuto funkci je součin $\sigma_t \sigma_\omega$ větší než $\frac{1}{2}$.

Příklad 3:

$$f(t) = r_{\frac{1}{2}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pro } |t| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\hat{f}(\nu) = \frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu}$$

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{12}$$

$$\sigma_\nu^2 = \infty$$

Pro tuto funkci je součin $\sigma_t \sigma_\omega$ roven nekonečnu.

V příkladu 1 se nám podařilo uhádnout funkci, pro kterou je součin $\sigma_t \sigma_\omega$ minimální. Nabízí se otázka, jestli je to jediná funkce, která minimalizuje tento součin, a pokud ne, jak vypadají další funkce.

Ukážeme si postup, jak lze tuto funkci najít jako řešení diferenciální rovnice, kterou odvodíme. Tím dokážeme, že Gaussova funkce je opravdu jediná funkce s touto vlastností.

Pro funkci f můžeme spočítat číslo $\sigma_t^2 \sigma_\omega^2$. Tedy máme zobrazení S z množiny funkcí do množiny čísel (tzv. funkcionál) $S(f) = \sigma_t^2 \sigma_\omega^2$. Hledáme funkci, pro kterou je toto číslo minimální, označme ji g . To znamená, že funkce $f(t) = g(t) + \epsilon h(t)$ pro libovolné číslo ϵ a libovolnou funkci h dá stejné nebo větší číslo.

$$S(g) \leq S(g + \epsilon h)$$

Takže zobrazení z množiny čísel do množiny čísel $s(\epsilon) = S(g + \epsilon h)$ má v bodě $\epsilon = 0$ minimum. To lze najít pomocí derivace funkce s

$$\left. \frac{ds}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}$$

Označme vlnkou derivaci podle ϵ (ne podle t ani ν ani x) vyčíslenou v bodě $\epsilon = 0$

$$()^\sim = \left. \frac{d()} {d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}$$

Hledáme funkci g , pro kterou je

$$(\sigma_t^2 \sigma_\omega^2)^\sim = 0.$$

Připravíme si:

- $f^\sim = h$
- $(f^*)^\sim = h^*$

- $(ff^*)^\sim = hg^* + gh^* = 2\text{Re}(h^*g)$
- $(\sigma_t^2\sigma_\omega^2)^\sim = (\sigma_t^2)^\sim\sigma_\omega^2 + \sigma_t^2(\sigma_\omega^2)^\sim$
- $\sigma_t^2 = \bar{t}^2 - (\bar{t})^2$
- $(\sigma_t^2)^\sim = (\bar{t}^2)^\sim - 2\bar{t}(\bar{t})^\sim$
- $\bar{t}^2 = \frac{\int_R t^2 |f(t)|^2 dt}{\int_R |f(t)|^2 dt}$
- $(\bar{t}^2)^\sim = \frac{\int_R t^2 2\text{Re}(h^*g) dt \int_R |g(t)|^2 dt - \int_R t^2 |g(t)|^2 dt \int_R 2\text{Re}(h^*g) dt}{(\int_R |g(t)|^2 dt)^2}$
- $\sigma_\nu^2 = \bar{\nu}^2 - (\bar{\nu})^2$
- $\bar{\nu}^2 = \frac{\int_R \nu^2 |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu}{\int_R |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu}$
- $(\bar{\nu}^2)^\sim = \frac{\int_R \nu^2 2\text{Re}(\hat{h}^*\hat{g}) d\nu \int_R |\hat{g}(\nu)|^2 d\nu - \int_R \nu^2 |\hat{g}(\nu)|^2 d\nu \int_R 2\text{Re}(\hat{h}^*\hat{g}) d\nu}{(\int_R |\hat{g}(\nu)|^2 d\nu)^2}$
- $\hat{g} = \int_R g(t) \exp(-i2\pi\nu t) dt$
- $(\hat{g})^* = \int_R g^* \exp(i2\pi\nu t) dt = \check{g}^*$
- $\widehat{(\hat{g})^*} = g^*$
- $\int_R \hat{u}v d\nu = \int_R u\hat{v} d\nu$
- $\int_R \nu^2 (\hat{h})^* \hat{g} d\nu = \int_R \widetilde{\check{h}^*} \nu^2 \hat{g} d\nu = \int_R h^* \widetilde{\nu^2 \hat{g}} d\nu = \int_R h^* \frac{g''}{-4\pi^2} d\nu$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat

- $\bar{t} = 0$
- $\bar{\nu} = 0$
- $\int_R |g(t)|^2 dt = \int_R |\hat{g}(\nu)|^2 d\nu = 1$

- $\sigma_t^2 = \sigma_\nu^2 = \frac{1}{4\pi}$

A dostaneme

$$\operatorname{Re} \int_R h^* \left(t^2 g - \sigma_t^2 g - \frac{g''}{4\pi^2} - \sigma_\nu^2 g \right) = 0$$

Má-li být tento integrál roven nule pro všechny komplexní funkce h , musí být výraz v závorce nulový, což po úpravě dá rovnici pro neznámou funkci g

$$g'' + (2\pi - 4\pi^2 t^2)g = 0$$

To je zvláštní případ Weberovy rovnice

$$g''(t) + P_2(t)g(t) = 0,$$

kde $P_2(t)$ je kvadratický mnohočlen. Její řešení se nazývají parabolické válcové funkce. V některých speciálních případech lze tyto funkce vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Tak je tomu i v našem případě. Jde o lineární diferenciální rovnici druhého řádu s nekonstantními koeficienty. Jedno její řešení je

$$g_1(t) = \exp(-\pi t^2).$$

To lze ověřit zkouškou.

Toto řešení splňuje $g_1(0) = 1$, $g_1'(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} g_1(t) = 0$.

Druhé řešení g_2 najdeme tak, že předpokládáme $g_2(t) = g_1(t)\varphi(t)$, kde φ je neznámá funkce. Tu najdeme dosazením tohoto tvaru do rovnice. Po úpravě dostaneme

$$\varphi''(t) - 4\pi t \varphi'(t) = 0$$

Substitucí $\varphi'(t) = y(t)$ dostaneme rovnici prvního řádu

$$y'(t) = 4\pi t y(t),$$

kterou vyřešíme separací proměnných a dostaneme

$$y(t) = \exp(2\pi t^2)$$

takže

$$\varphi(t) = \int_0^t \exp(2\pi x^2) dx$$

a

$$g_2(t) = g_1(t)\varphi(t) = \exp(-\pi t^2) \int_0^t \exp(2\pi x^2) dx$$

Toto řešení splňuje $g_2(0) = 0$, $g_2'(0) = 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} g_2(t) = \infty$ a pro toto řešení neexistují hodnoty σ_t a σ_ν . Takže Gaussova funkce

$$g_1(t) = \exp(-\pi t^2)$$

je jediná funkce (až na násobek, změnu měřítka a translaci v čase a ve frekvenci), pro kterou platí $\sigma_t \sigma_\omega = \frac{1}{2}$.

Jaké jsou fyzikální interpretace vztahu

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}$$

který se nazývá relace neurčitosti? Ukážeme si dvě použití, jedno v klasické fyzice a jedno v kvantové mechanice.

Funkci f můžeme považovat za matematický popis zvukového signálu, např. závislost okamžitého tlaku vzduchu v uchu posluchače na čase. Pokud je zvukem jeden hudební tón znějící po dostatečně dlouho dobu (velké σ_t), může posluchač určit jeho výšku, tedy frekvenci, dostatečně přesně (malé σ_ω). Když budeme zkracovat dobu trvání tónu (malé σ_t), bude se ztrácet přesnost určení frekvence (velké σ_ω). V krajním případě, kdy doba trvání zvuku bude výrazně kratší než perioda původního tónu, bude určení frekvence nemožné. Takový zvuk bychom popsali jako cvaknutí, ne tón.

Druhou zajímavou aplikaci najdeme v kvantové mechanice, kde mikročástice popisujeme vlnovou funkcí ψ . Ta určuje pravděpodobnost toho, že poloha částice x je v intervalu mezi a a b vztahem $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx$. Pohybující se částici můžeme popsat vlnovou funkcí

$$\psi(x) \propto \exp(ikx)$$

kde k je vlnové číslo. To lze pomocí de Broglieho vztahu $k = \frac{p}{\hbar}$ vyjádřit pomocí hybnosti částice p a Planckovy konstanty $\hbar$

$$\psi(x) \propto \exp(i \frac{p}{\hbar} x)$$

V obecnějším případě může být vlnová funkce vyjádřena jako lineární kombinace těchto vln pomocí součtu

$$\psi(x) \propto \sum_n A_n \exp(i \frac{p_n}{\hbar} x)$$

nebo integrálu

$$\psi(x) \propto \int_R \phi(p) \exp(i \frac{p}{\hbar} x) dp$$

kde funkce $\phi(p)$ udává amplitudu módu s hybností p . Vidíme, že funkce ψ a ϕ jsou spojeny Fourierovou transformací. Místo časové proměnné t máme prostorovou proměnnou x a místo úhlové frekvence ω zde vystupuje $p/\hbar$, hybnost dělená Planckovou konstantou. Relace neurčitosti tedy je $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{1}{2}$ a po vynásobení Planckovou konstantou máme slavný vztah nazývaný Heisenbergovy relace neurčitosti

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

zapisovaný často jako

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

To je v souladu s experimentem, kdy proud částic, např. elektronů, dopadá na šterbinu. Je-li šterbina úzká, konkrétně je-li její šířka srovnatelná s vlnovou délkou částic, dochází k ohybu částic. Na stínítku za šterbinou pozorujeme stopu větší než je šířka šterbiny. Čím je šterbina užší, tedy přesné určení polohy (malé σ_x), tím je stopa širší, tedy nepřesné určení hybnosti (velké σ_p) a obráceně. (Zde prostorová souřadnice x míří kolmo na proud částic.)

Závěr:

Odvodili jsme relace neurčitosti

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}$$

uvedli jsme příklad funkce, pro kterou platí ostrá nerovnost, a příklad funkce (Gaussova funkce)

$$\exp(-\pi t^2)$$

pro kterou platí rovnost. Ukázali jsme si, že je to jediná funkce (až na násobek, změnu měřítka a translaci v čase a ve frekvenci), pro kterou nastává

minimum. Uvedli jsme si dvě fyzikální interpretace relace neurčitosti. Jednu z klasické fyziky, kdy přesnost výšky tónu je nepřímo úměrná době trvání tónu. Druhá z kvantové mechaniky

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

kdy součin neurčitostí polohy a hybnosti je omezen zdola. To jsme si ilustrovali pokusem na úzké štěrbině, kdy proud částic zanechá na stínítku stopu, jejíž šířka (míra neurčitosti hybnosti) je nepřímo úměrná šířce štěrbině (míra neurčitosti polohy).

Pokud Vás tento text zaujal,
kladně nebo záporně,
budu rád, když mi dáte vědět na adresu
Pavel.Pokorny@vscht.cz

V Praze, 2. ledna 2014
Pavel Pokorný
Ústav matematiky
Vysoká škola chemicko-technologická v Praze