

Integrál

Pavel.Pokorny@vscht.cz

11. července 2019

Zde se seznámíme s určitým a neurčitým integrálem funkce jedné reálné proměnné.

1 Neurčitý integrál

Neurčitý integrál (také nazývaný primitivní funkce) je vlastně antiderivace, tedy opak derivace funkce. Např. víme, že derivace funkce sinus je funkce cosinus, takže neurčitý integrál funkce cosinus je funkce sinus. Také říkáme, že primitivní funkce k funkci cosinus je funkce sinus.

1.1 Definice

Definice: Říkáme, že funkce $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu I , neboli že funkce $F(x)$ je neurčitý integrál k funkci $f(x)$, jestliže platí $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in I$. To zapisujeme

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

1.2 Úvodní příklady

Víme, že $(x^2)' = 2x$, proto neurčitý integrál k funkci $2x$ je funkce x^2 . To ale není jediná funkce, jejíž derivace je rovna $2x$. Když k funkci x^2 přičteme libovolnou konstantu, označme ji c , tak derivace funkce $x^2 + c$ bude také rovna $2x$. To zapisujeme

$$\int 2x dx = x^2 + c.$$

Víme, že $(x^n)' = nx^{n-1}$, proto pro $n \neq -1$ platí

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

A jak to bude pro $n = -1$, tedy jaký bude neurčitý integrál pro funkci $\frac{1}{x}$? Víme, že $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, proto

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c.$$

Pro pevné vybrané hodnoty n dostaneme tyto užitečné výsledky. Pro $n = 2$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c.$$

Pro $n = 3$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c.$$

Pro $n = \frac{1}{2}$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c.$$

Víme, že $(e^x)' = e^x$, proto

$$\int e^x dx = e^x + c.$$

Také víme, že $(a^x)' = a^x \ln a$, proto

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c.$$

Jaké jsou zde podmínky na základ a ? Vztah pro derivaci vyžaduje $a > 0$. Ve vztahu pro integrál navíc dělíme výrazem $\ln a$, proto je nutné, aby navíc bylo $a \neq 1$.

1.3 Per partes

Dále, víme, že derivace součtu je součet derivací, proto i integrál součtu je součet integrálů, např.

$$\int (x^2 + \cos x) dx = \frac{1}{3}x^3 + \sin x + c.$$

A jak to vypadá se součinem funkcí? Víme, že derivace součinu není součin derivací. Proto nás nepřekvapí, že ani integrál součinu není součin integrálů. Víme, že pro derivaci součinu dvou funkcí platí

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Odtud snadno odvodíme užitečné pravidlo, které se nazývá derivování per partes, česky bychom mohli říci po částech, anglicky by parts. Integrováním obou stran dostaneme (pro stručnost zde vynecháme proměnnou x)

$$uv = \int u'v + \int uv'$$

a tedy

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

nebo ekvivalentně

$$\int uv' = uv - \int u'v.$$

Ukažme si, jak se toto pravidlo používá. Pomocí svislých čar si vytvoříme pracovní prostor, kam si do horního řádku zapíšeme dva výrazy, na které jsme rozložili integrovanou funkci. A do dolního řádku si napíšeme odpovídající derivaci a primitivní funkci. Zde vlastně musíme již integrovat. A protože budeme integrovat ještě jednou, nazývá se tato metoda integrování po částech. Např.

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{ll} u &= x & v' &= e^x \\ u' &= 1 & v &= e^x \end{array} \right| = x e^x - \int 1 e^x dx = x e^x - e^x + c.$$

Snadno se lze přesvědčit, jestli je výsledek správně. Když zderivujeme primitivní funkci, měli bychom dostat původní integrovanou funkci

$$(x e^x - e^x + c)' = e^x + x e^x - e^x = x e^x.$$

A co kdybychom použili metodu per partes obráceně? Zkusme to:

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{ll} u' &= x & v &= e^x \\ u &= \frac{x^2}{2} & v' &= e^x \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx.$$

Tento výsledek je sice správný, ale není příliš užitečný. Původně jsme měli za úkol zintegrovat součin mnohočlenu prvního stupně a exponenciály. A převedli jsme to na úkol zintegrovat součin mnohočlenu druhého stupně a exponenciály. Tím se úkol zkomplikoval. A tak to je často při použití metody per partes. Jedna volba úkol zjednoduší, druhá naopak zkomplikuje.

1.4 Substituce

Substituce je velice užitečná metoda pro počítání integrálů. Ukažme si její použití na příkladech. Opět si pomocí svislých čar vytvoříme pracovní prostor, kam si zapíšeme, jakou část výrazu nahradíme pomocí substituce novou proměnnou, např. t . A také si připravíme vztah mezi diferenciálem dx staré proměnné x a diferenciálem dt nové proměnné t .

$$\int e^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x \\ dt = 2dx \end{array} \right| = \int e^t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + c = \frac{1}{2} e^{2x} + c.$$

Nebo jiný příklad

$$\int \sqrt{\ln x} \frac{1}{x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \ln^{\frac{3}{2}} x + c.$$

V těchto příkladech jsme pomocí nové integrační proměnné označili část integrované funkce. Jindy naopak můžeme starou integrační proměnnou x nahradit výrazem obsahující novou integrační proměnnou t .

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \\ &= \int \cos t \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + c = \\ &= \frac{1}{2} (t + \sin t \cos t) + c = \frac{1}{2} (t + \sin t \sqrt{1-\sin^2 t}) + c = \\ &= \frac{1}{2} (\arcsin x + x \sqrt{1-x^2}) + c. \end{aligned}$$

1.5 Výpočet neurčitého integrálu na počítači

Je dobré vědět, že moderní matematické softwarové nástroje, jako např. *Mathematica* umožňují snadný výpočet integrálu. Např. tento poslední příklad lze vyřešit příkazem

```
In[1]:= Integrate[Sqrt[1-x^2],x]
```

```

      2
      x Sqrt[1 - x ] + ArcSin[x]
Out[1]= -----
      2

```

Tyto softwarové nástroje obsahují rozsáhlé databáze primitivních funkcí a řadu pravidel, jak s nimi pracovat. Přesto ale pro mnoho funkcí nelze primitivní funkci zapsat pomocí elementárních funkcí. Jak to poznáme? Když nám systém *Mathematica* nevrátí primitivní funkci, tak je velká pravděpodobnost, že ji nelze zapsat. To lze vidět na tomto příkladě.

```
In[1]:= Integrate [ x Exp[x ArcTan[x]] , x]
```

```
Out[1]= Integrate[Ex ArcTan[x] , x]
```

Pokud nemáme k dispozici software *Mathematica* nebo neznáme syntax, jak zadávat příkazy, můžeme s výhodou použít www.wolframalpha.com

1.6 Rozklad na parciální zlomky

Víme, jak převádět zlomky na společného jmenovatele. Opačný postup se nazývá rozklad na parciální zlomky. Tím lze zlomek převést na jednodušší zlomky, které snadno zintegrujeme. Ukažme si to na příkladech.

1.6.1 Příklad

Spočtete

$$I = \int \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

Nejdříve zkontrolujeme, je-li stupeň mnohočlenu v čitateli (zde 1) menší než stupeň mnohočlenu ve jmenovateli (zde 2). Pokud by tomu tak nebylo, tak dělením mnohočlenů převedeme zlomek na součet mnohočlenu a zlomku, který to již splňuje. Dále najdeme nulové body jmenovatele řešením rovnice

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2.$$

Takže víme, že

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Nyní integrovanou funkci rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Neznámé koeficienty A, B najdeme z podmínky, aby toto platilo pro všechna x (až na nulové body). Takže odstraníme zlomky vynásobením jmenovatelem a dostaneme

$$A(x-2) + B(x-1) = 2x+1$$

$$Ax - 2A + Bx - B = 2x + 1.$$

Dva mnohočleny se rovnají, když se rovnají koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné x vlevo a vpravo, tedy

$$x^0 : \quad -2A - B = 1$$

$$x^1 : \quad A + B = 2.$$

To je soustava dvou lineárních algebraických rovnic pro dvě neznámé A, B . Ty lze řešit např. Gaussovou eliminací. Zde postačí obě rovnice sečíst, tím vypadne neznámá B a dostaneme

$$-A = 3$$

tedy

$$A = -3$$

a dosazením do druhé rovnice najdeme $B = 5$. Nyní lze snadno spočítat neurčitý integrál

$$I = \int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} dx = \int \left(\frac{-3}{x-1} + \frac{5}{x-2} \right) dx = -3 \ln |x-1| + 5 \ln |x-2| + c.$$

1.6.2 Vícenásobný kořen

Pokud by některý kořen jmenovatele měl vyšší násobnost, musíme použít zlomky s mocninami až do této násobnosti. Ukažme si to na příkladu.

$$I = \int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} dx.$$

Použijeme rozklad

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2},$$

odstraníme zlomky

$$A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2 = 1$$

a porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné x :

$$x^0 : \quad 2A - 2B + C = 1$$

$$x^1 : \quad -3A + B - 2C = 0$$

$$x^2 : \quad A + C = 0.$$

To je soustava třech lineárních algebraických rovnic pro tři neznámé A, B, C . Tu lze řešit např. Gaussovou eliminací.

Zde si ukážeme jednu fintu, jak nalézt řešení rychleji. Rovnice, kterou jsme dostali po odstranění zlomků má platit pro všechna reálná x , tedy i pro $x = 1$. Pak bude závorka $(x-1)$ nulová a dostaneme vztah pro jedinou neznámou B

$$-B = 1,$$

tedy

$$B = -1.$$

Podobně volbou $x = 2$ dostaneme $C = 1$. Zbylou neznámou A dostaneme např. z třetí rovnice, tedy $A = -C = -1$. Takže máme

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} dx = \int \left(-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2} \right) dx = \\ &= -\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \ln|x-2|. \end{aligned}$$

2 Určitý integrál

Zatímco neurčitý integrál je funkce, určitý integrál je číslo. Pro $a, b \in R$ je určitý integrál funkce $f(x)$ od a do b definován vztahem

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

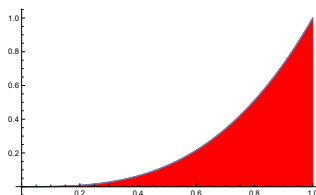
kde $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$. Při výpočtu použijeme hranaté závorky, do kterých zapíšeme primitivní funkci, a vpravo dole a nahoře zapíšeme dolní mez a a horní mez b . Např. takto

$$\int_2^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_2^3 = \frac{1}{3} 3^3 - \frac{1}{3} 2^3 = \frac{19}{3}.$$

2.1 Úvodní příklady

Spočtěme pár příkladů. Geometrický význam určitého integrálu kladné funkce je plošný obsah rovinného útvaru ohraničeného shora grafem integrované funkce a zdola osou x .

2.1.1 Příklad 1



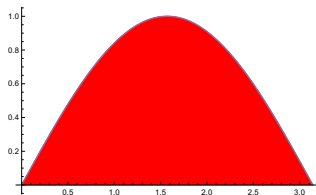
$$\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}$$

Tento integrál lze spočítat pomocí software *Mathematica* příkazem

```
In[1]:= Integrate[x^3, {x, 0, 1}]
```

```
Out[1]= 1/4
```

2.1.2 Příklad 2

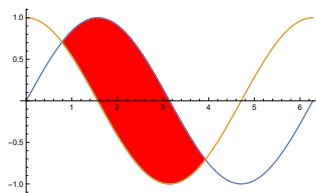


$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 - (-1) = 2.$$

2.1.3 Příklad 3

Plochu ohraničenou shora grafem funkce $f(x)$ a zdola grafem funkce $g(x)$ spočteme jako určitý integrál rozdílu funkcí $f(x) - g(x)$. Levý bok útvaru může být zadán hodnotou dolní meze a a pravý bok hodnotou horní meze b . Pokud meze nejsou zadány a máme určit plochu mezi dvěma průsečíky grafů funkcí $f(x)$ a $g(x)$, najdeme průsečíky řešením rovnice

$$f(x) = g(x).$$



Tak lze nalézt plochu jednoho útvaru mezi grafy funkcí sinus a cosinus. Nejdříve si vyřešíme rovnici

$$\sin x = \cos$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = \arctg 1 + k\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

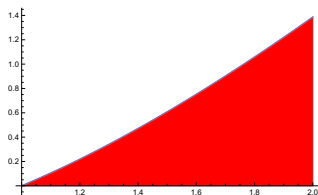
Jak šlo také uhodnout nebo z grafu zjistit, nejmenší kladná řešení jsou $a = \frac{\pi}{4}$ a $b = \frac{5\pi}{4}$. Pak plocha bude

$$P = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) \, dx = \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} =$$

$$= -\cos \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{4} - \left(-\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

2.1.4 Příklad 4

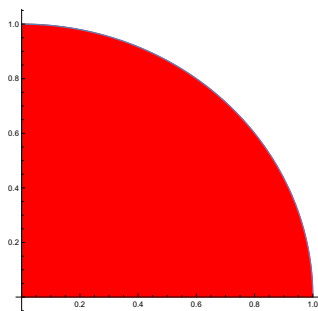
Počítáme-li určitý integrál metodou per partes, máme dvě možnosti. Buďto si nejdříve najdeme metodou per partes primitivní funkci a potom do ní dosadíme dolní a horní meze a odečteme. A nebo můžeme použít metodu per partes přímo pro určitý integrál. Nesmíme ale zapomenout napsat integrační meze také k prvnímu výrazu uv . Ukažme si tuto druhou možnost na příkladu.



$$\begin{aligned} P_4 = \int_1^2 x \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u' = x & v = \ln x \\ u = \frac{x^2}{2} & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2} \, dx = \\ &= 2 \ln 2 - 0 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{2^2 - 1^2}{4} = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

2.1.5 Příklad 5

Podobně, počítáme-li určitý integrál metodou substituce, máme dvě možnosti. Buďto si nejdříve najdeme metodou substituce primitivní funkci a potom do ní dosadíme dolní a horní meze a odečteme. A nebo můžeme použít metodu substituce přímo pro určitý integrál. Ale nesmíme zapomenout přepočítat meze, mezi kterými probíhá nová integrační proměnná. Ukažme si tuto druhou možnost na příkladu.



$$\begin{aligned}
P_5 &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left[\frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Jaké jsou výhody a nevýhody první a druhé možnosti? Když počítáme nejdříve primitivní funkci pomocí substituce, musíme se vracet od nové integrační proměnné, zde t , ke staré integrační proměnné, zde x . Ale nemusíme přepočítávat meze. Když počítáme určitý integrál pomocí substituce, tak je výhoda, že se nemusíme vracet od nové integrační proměnné ke staré. Ale nevýhoda je, že musíme přepočítat meze. Zde probíhala stará integrační proměnná x od $x_1 = 0$ do $x_2 = 1$ a nová integrační proměnná t probíhala od $t_1 = 0$ do $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Někdy lze určitý integrál spočítat pomocí geometrické úvahy. Zde grafem funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ je horní půlkružnice o poloměru $r = 1$. Obsah kruhu je $P = \pi r^2$. Pro $r = 1$ máme $P = \pi$. Integrál má význam pravé poloviny horního půlkruhu, tedy čtvrtina kruhu. Proto je roven $\frac{\pi}{4}$.

2.2 Finta s lichou a sudou funkcí

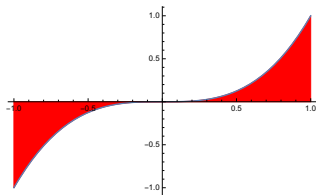
Je-li integrační interval $I = \langle a, b \rangle$ souměrný, tj. $b = -a$, a je-li integrovaná funkce lichá, tj. platí $f(-x) = -f(x)$ pro všechna $x \in I$, pak je určitý integrál rovný nule, tedy

$$\int_{-b}^b f(x) dx = 0.$$

To je vidět z obrázku, protože graf liché funkce je souměrný podle počátku. Tedy příspěvek pro kladné argumenty je opačný než příspěvek pro záporné argumenty. Také to lze vysvětlit tak, že primitivní funkce $F(x)$ k liché funkci je funkce sudá, tedy platí $F(-x) = F(x)$. Je-li $a = -b$, pak $F(a) = F(b)$ a rozdíl je nulový.

2.2.1 Příklad 6

To lze ilustrovat na příkladu

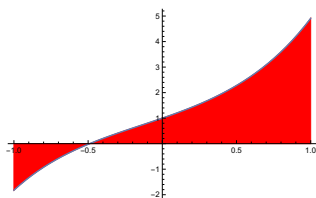


$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{1^4 - (-1)^4}{4} = 0.$$

2.2.2 Příklad 7

To, že integrál liché funkce přes souměrný interval je rovný nule, platí i v případě, že nejsme schopni napsat primitivní funkci $F(x)$. To je velká výhoda.

Tuto fintu můžeme použít i v případě, že funkce není lichá, ale pouze její část je lichá. Ukažme to na příkladě.



$$I_7 = \int_{-1}^1 (x e^{x \arctg x} + e^x) dx.$$

Zde integrovaná funkce není lichá, ale její první člen je lichý. Protože $\arctg x$ je lichá. Tedy $x \arctg x$ je sudá. Tedy $e^{x \arctg x}$ je sudá. Tedy $x e^{x \arctg x}$ je lichá. A její integrál přes souměrný interval je nulový, i když neumíme napsat primitivní funkci. A tedy celý integrál je dán pouze příspěvkem od druhého sčítance

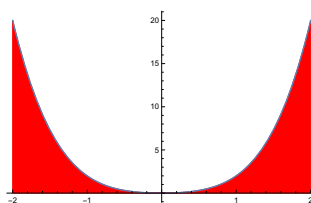
$$I_7 = \int_{-1}^1 (x e^{x \arctg x} + e^x) dx = \int_{-1}^1 e^x dx = [e^x]_{-1}^1 = e - e^{-1}.$$

2.2.3 Příklad 8

Je-li integrovaná funkce sudá, tj. $f(-x) = f(x)$, a integrační interval je souměrný, můžeme výpočet mírně zjednodušit užitím vztahu

$$\int_{-b}^b f(x) dx = 2 \int_0^b f(x) dx.$$

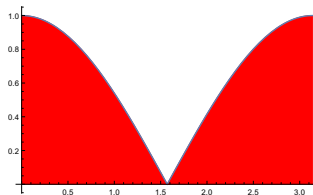
Ukažme si to na příkladě.



$$\begin{aligned} I_8 &= \int_{-2}^2 (x^2 + x^4) dx = 2 \int_0^2 (x^2 + x^4) dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \\ &= 2 \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^5}{5} \right) = 2 \frac{40 + 96}{15} = \frac{272}{15}. \end{aligned}$$

2.3 Integrál funkce s absolutní hodnotou

Když integrovaná funkce obsahuje absolutní hodnotu, musíme ji odstranit. Pokud je výraz v absolutní hodnotě nezáporný, lze absolutní hodnotu odstranit, přesněji, nahradíme ji kulatou závorkou. Je-li výraz v absolutní hodnotě záporný, nahradíme absolutní hodnotu závorkou a před ní napíšeme mínus. Proto musíme integrál roztrhnout na více integrálů tak, aby výraz v absolutní hodnotě v každém integrálu neměnil znaménko. Ukažme si to na příkladu.



$$I = \int_0^{\pi} |\cos x| dx.$$

Kdy výraz v absolutní hodnotě mění znaménko? K tomu si vyřešíme rovnici

$$\cos x = 0 \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Ta má jediné řešení

$$x = \frac{\pi}{2}.$$

Proto musíme integrál roztrhnout na dva integrály, od 0 do $\frac{\pi}{2}$ a od $\frac{\pi}{2}$ do π .

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |\cos x| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos x dx = \\ &= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 - \sin \pi + \sin \frac{\pi}{2} = 2. \end{aligned}$$