

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%      Krivkovy integral skalarniho pole,      %
%      krivkovy integral vektoroveho pole,     %
%              potencial,                       %
%              fyzikalni aplikace               %
%
%              Resene priklady                   %
%      vcetne reseni pomoci Maple a Mathematica %
%
%              19.7.2006                         %
%      http://www.vscht.cz/mat/Pavel.Pokorny/students %
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Příklad 1: Vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C (5x - 9y) ds,$$

kde C je úsečka s krajními body $[1; 2]$ a $[5; 7]$.

Výsledek:

$$I = -\frac{51}{2}\sqrt{41}.$$

Návod: Použijte vztah

$$I = \int_C f(x, y) ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Postup: Použijeme parametrizaci

$$x = 1 + 4t; \quad y = 2 + 5t; \quad t \in \langle 0; 1 \rangle.$$

Potom rychlost probíhání křivky je

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

a integrál je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (5(1 + 4t) - 9(2 + 5t))\sqrt{41} dt = \sqrt{41} \left[-13t - \frac{25}{2}t^2 \right]_0^1 = \\ &= \sqrt{41} \left(-13 - \frac{25}{2} \right) = -\frac{51}{2}\sqrt{41}. \end{aligned}$$

Maple:

```
> f:=5*x-9*y:
> x:=1+4*t:
> y:=2+5*t:
> v:=sqrt(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2):
> i:=int(f*v,t=0..1);
```

$$i := -\frac{51 \sqrt{41}}{2}$$

Mathematica:

In[1] := f=5x-9y;

In[2] := x=1+4t;

In[3] := y=2+5t;

In[4] := v=Sqrt[D[x,t]^2+D[y,t]^2];

In[5] := i=Integrate[f*v,{t,0,1}]

-51 Sqrt[41]

Out[5] = -----
2

Příklad 2: Vypočtěte

$$I = \int_C (8x^2 - 5y^2) ds,$$

kde C je křivka $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

Výsledek:

$$I = 12\pi.$$

Návod: Použijte vztah

$$I = \int_C f(x, y) ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Postup: Použijeme zadanou parametrizaci

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Potom rychlost probíhání křivky je

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} = 2$$

a integrál je

$$I = \int_0^\pi (32 \cos^2 t - 20 \sin^2 t) 2 dt = 12\pi.$$

Maple:

```
> f:=8*x^2-5*y^2:
> x:=2*cos(t):
> y:=2*sin(t):
> v:=sqrt(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2):
> i:=int(f*v,t=0..Pi);
                                     i := 12 Pi
```

Mathematica:

```
In[1]:= f = 8 x^2 - 5 y^2;
In[2]:= x = 2 Cos[t];
In[3]:= y = 2 Sin[t];
In[4]:= v = Sqrt[D[x,t]^2+D[y,t]^2];
In[5]:= i = Integrate[f*v,{t,0,Pi}]
Out[5]= 12 Pi
```

Příklad 3: Vypočtěte

$$\int_C (2x + 3y) ds,$$

kde C je úsečka vyřatá na přímce $y = 4x + 8$ souřadnicovými osami.

Výsledek:

$$I = 20\sqrt{17}.$$

Návod: Použijte vztah

$$I = \int_C f(x, y) ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Postup: Použijeme parametrizaci

$$x = t, \quad y = 4t + 8, \quad t \in \langle -2, 0 \rangle.$$

Potom rychlost probíhání křivky je

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{(1)^2 + (4)^2} = \sqrt{17}$$

a integrál je

$$I = \int_{-2}^0 (2t + 3(4t + 8))\sqrt{17} dt = \sqrt{17} \left[7t^2 + 24t \right]_{-2}^0 = \sqrt{17}(-28 + 48) = 20\sqrt{17}.$$

Maple:

```
> f:=2*x+3*y:
> x:=t:
> y:=4*t+8:
> v:=sqrt(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2):
> i:=int(f*v,t=-2..0);
```

$$i := 20 \sqrt{17}$$

Mathematica:

```
In[1]:= f = 2 x + 3 y;
In[2]:= x = t;
In[3]:= y = 4 t + 8;
In[4]:= v = Sqrt[D[x,t]^2+D[y,t]^2];
In[5]:= i = Integrate[f*v,{t,-2,0}]
Out[5]= 20 Sqrt[17]
```

Příklad 4: Vypočtete

$$I = \int_K xy \, ds,$$

kde křivka K je obvod trojúhelníku ABC s vrcholy $A = [1; 2; 3]$, $B = [2; 3; 5]$, $C = [8; 0; 1]$.

Výsledek:

$$I = \frac{23}{6}\sqrt{6} + \frac{10}{3}\sqrt{57} + 6\sqrt{61}.$$

Návod: Křivkový integrál přes tři úsečky nahradíme součtem třech integrálů přes jednotlivé úsečky. Na každý z těchto třech integrálů použijeme vztah

$$I = \int_K f(x, y, z) \, ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt.$$

Postup: Pro parametrizaci úsečky AB použijeme vztah $X = A + t(B - A)$, kde $t \in \langle 0; 1 \rangle$, tedy $x = 1 + t$; $y = 2 + t$; $z = 3 + 2t$. Rychlost probíhání úsečky AB je

$$v = \|B - A\| = \sqrt{6}$$

a integrál přes úsečku AB je

$$I_{AB} = \int_0^1 (1+t)(2+t)\sqrt{6} \, dt = \sqrt{6} \left[2t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 = \frac{23}{6}\sqrt{6}.$$

Obdobně spočteme integrály přes úsečku BC a přes úsečku CA a tyto tři integrály sečteme a dostaneme

$$I = I_{AB} + I_{BC} + I_{CA} = \frac{23}{6}\sqrt{6} + \frac{10}{3}\sqrt{57} + 6\sqrt{61}.$$

Maple:

```
> a:=[1,2,3]: b:=[2,3,5]: c:=[8,0,1]:
> f:=x->x[1]*x[2]:
> j:=(p,q)->
    int(f(evalm(p+t*(q-p)))*linalg[norm](q-p,2),t=0..1):
> i:=j(a,b)+j(b,c)+j(c,a);
```

$$i := \frac{23}{6} \sqrt{6} + 6 \sqrt{61} + \frac{10}{3} \sqrt{57}$$

Mathematica:

```
In[1] := a={1,2,3}; b={2,3,5}; c={8,0,1};
In[2] := f[{x_,y_,z_}]:=x*y;
In[3] := j[p_,q_]:=Integrate [f[p+t*(q-p)]*Norm[q-p],{t,0,1}];
In[4] := i=j[a,b]+j[b,c]+j[c,a]
Out[4]= 
$$\frac{23}{\text{Sqrt}[6]} + 10 \frac{\text{Sqrt}[--]}{3} + 6 \text{Sqrt}[61]$$

```

Příklad 5: Zjistěte, zda je vektorové pole

$$\vec{F}(x, y) = (y^2, x)$$

potenciální, a vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

kde C je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $(0, 0)$ a koncovým bodem $(1, 1)$.

Výsledek: Toto vektorové pole není potenciální a $I = \frac{13}{15}$.

Návod: Porovnejte $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ a $\frac{\partial F_2}{\partial x}$. Pro výpočet integrálu použijte vztah $I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy)$.

Postup: Označíme si složky pole $F_1(x, y) = y^2$ a $F_2(x, y) = x$ a spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 2y$$

a

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = 1.$$

Ty se nerovnají, proto pole $\vec{F}$ není potenciální a integrál závisí na integrační cestě (proto ji nemůžeme změnit). Pro výpočet integrálu zvolíme parametrizaci

$$x = t, \quad y = t^2, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 1.$$

Odtud

$$v_1 = x' = 1, \quad v_2 = y' = 2t,$$

takže

$$dx = v_1 dt = dt, \quad dy = v_2 dt = 2t dt$$

a integrál je

$$\begin{aligned} I &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy) = \int_0^1 ((t^2)^2 + t \cdot 2t) dt = \int_0^1 (t^4 + 2t^2) dt = \\ &= \left[\frac{t^5}{5} + \frac{2}{3}t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{13}{15}. \end{aligned}$$

Maple:

```

> f1:=y^2: f2:=x: x:=t: y:=t^2:
> v1:=diff(x,t): v2:=diff(y,t):
> i:=int(f1*v1+f2*v2,t=0..1);

```

13
 $i := \frac{13}{15}$

Mathematica:

```

In[1]:= f1=y^2; f2=x; x=t; y=t^2;
In[2]:= v1=D[x,t]; v2=D[y,t];
In[3]:= i=Integrate[f1*v1+f2*v2,{t,0,1}]

```

13
Out[3]= $\frac{13}{15}$

Příklad 6: Zjistěte, zda je vektorové pole

$$\vec{F}(x, y) = (y^2, 2xy)$$

potenciální, a vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

kde C je jednotková kružnice obíhaná v kladném směru.

Výsledek: Toto vektorové pole je potenciální a $I = 0$.

Návod: Porovnejte $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ a $\frac{\partial F_2}{\partial x}$. Křivkový integrál vektorového pole, které má potenciál (nutno ověřit), po uzavřené křivce (nutno ověřit) je nulový.

Postup: Označíme si složky pole $F_1 = y^2$ a $F_2 = 2xy$ a spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y$$

a

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2y.$$

Ty se rovnají na $\mathbb{R}^2$, což je jednoduše souvislá množina, proto pole $\vec{F}$ má na $\mathbb{R}^2$ potenciál a integrál po uzavřené křivce (což zadaná křivka je) je rovný nule.

Maple:

```
> f1:=y^2: f2:=2*x*y:  
> diff(f1,y)-diff(f2,x);
```

0

Mathematica:

```
In[1]:= f1=y^2; f2=2x*y;  
In[2]:= D[f1,y]-D[f2,x]  
Out[2]= 0
```

Příklad 7: Zjistěte, zda je vektorové pole

$$\vec{F}(x, y, z) = (2, 6, 5)$$

potenciální, a vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

kde C je jeden závit šroubovice

$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \pi.$$

Výsledek: Toto vektorové pole je potenciální a $I = 10\pi$.

Návod: Porovnejte $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ a $\frac{\partial F_2}{\partial x}$. Křivkový integrál vektorového pole, které má potenciál (nutno ověřit), nezávisí na integrační cestě.

Postup: Označíme si složky pole $F_1 = 2$, $F_2 = 6$ a $F_3 = 5$. Všechny jejich první parciální derivace jsou nulové, tedy platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}$$

na $\mathbb{R}^3$, což je jednoduše souvislá množina, proto pole $\vec{F}$ má na $\mathbb{R}^3$ potenciál a integrál nezávisí na integrační cestě. Proto můžeme místo po šroubovici integrovat po úsečce spojující její počáteční bod $(1, 0, 0)$ a její koncový bod $(1, 0, 2\pi)$. Zvolíme její parametrizaci

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$$

Potom

$$dx = 0, \quad dy = 0, \quad dz = dt$$

a integrál je

$$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 5 \, dt = 10\pi.$$

Poznámka:

V tomto vyjíměčně jednoduchém případě je snadné integrovat i po původní křivce, tedy po šroubovici a dostaneme

$$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = \int_0^{2\pi} (2(-\sin t) + 6(\cos t) + 5) dt = 10\pi,$$

tedy stejný výsledek.

Maple:

nejdříve po úsečce:

```
> f1:=2: f2:=6: f3:=5:
> x:=1: y:=0: z:=t:
> v1:=diff(x,t): v2:=diff(y,t): v3:=diff(z,t):
> i:=int(f1*v1+f2*v2+f3*v3,t=0..2*Pi);
i := 10Pi
```

a nyní po šroubovici:

```
> f1:=2: f2:=6: f3:=5:
> x:=cos(t): y:=sin(t): z:=t:
> v1:=diff(x,t): v2:=diff(y,t): v3:=diff(z,t):
> i:=int(f1*v1+f2*v2+f3*v3,t=0..2*Pi);
i := 10 Pi
```

Mathematica:

nejdříve po úsečce:

```
In[1]:= f1=2; f2=6; f3=5;
In[2]:= x=1; y=0; z=t;
In[3]:= v1=D[x,t]; v2=D[y,t]; v3=D[z,t];
In[4]:= i=Integrate[f1*v1+f2*v2+f3*v3,{t,0,2*Pi}]
Out[4]= 10 Pi
```

a nyní po šroubovici:

```
In[1]:= f1=2; f2=6; f3=5;
In[2]:= x=Cos[t]; y=Sin[t]; z=t;
In[3]:= v1=D[x,t]; v2=D[y,t]; v3=D[z,t];
In[4]:= i=Integrate[f1*v1+f2*v2+f3*v3,{t,0,2*Pi}]
Out[4]= 10 Pi
```

Příklad 8: Ověřte, že vektorové pole

$$\vec{F}(x, y) = (2x + y, 3y^2 + x)$$

má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G .

Výsledek: Pole $\vec{F}$ má potenciál $U(x, y) = x^2 + y^3 + xy$ na množině $G = \mathbb{R}^2$.

Návod: Porovnejte $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ a $\frac{\partial F_2}{\partial x}$. Potenciál U vektorového pole $\vec{F}$ je takové skalární pole U , pro které platí $\text{grad } U = \vec{F}$.

Postup: Označíme si složky pole $F_1 = 2x + y$ a $F_2 = 3y^2 + x$ a spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$$

a

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1.$$

Ty se rovnají na $\mathbb{R}^2$, což je jednoduše souvislá množina, proto pole $\vec{F}$ má na $\mathbb{R}^2$ potenciál. Potenciál můžeme nalézt dvojím způsobem:

(a) pomocí křivkového integrálu,

(b) řešením soustavy parciálních diferenciálních rovnic.

Ukážeme si oba způsoby, nejprve pomocí křivkového integrálu.

(a) Je výhodné zvolit si integrační cestu sestávající ze dvou úseček rovnoběžných se souřadnicovými osami. Zvolme si počáteční bod v počátku a obecný koncový bod označme $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Potom parametrizace úseček C_1, C_2 mohou být

$$C_1: \quad x = t, \quad y = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \tilde{x},$$

pak

$$dx = dt, \quad dy = 0,$$

a

$$C_2: \quad x = \tilde{x}, \quad y = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \tilde{y},$$

pak

$$dx = 0, \quad dy = dt.$$

Pro potenciál U platí

$$\begin{aligned} U(\tilde{x}, \tilde{y}) - U(0, 0) &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy) = \\ &= \int_{C_1} (F_1 dx + F_2 dy) + \int_{C_2} (F_1 dx + F_2 dy) = \int_0^{\tilde{x}} 2t dt + \int_0^{\tilde{y}} (3t^2 + \tilde{x}) dt = \\ &= \left[t^2 \right]_0^{\tilde{x}} + \left[t^3 + \tilde{x}t \right]_0^{\tilde{y}} = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^3 + \tilde{x}\tilde{y}. \end{aligned}$$

Takže potenciál je

$$U(x, y) = x^2 + y^3 + xy + c.$$

(b) Potenciál lze také najít z podmínky

$$\text{grad } U = \vec{F},$$

tedy řešením soustavy dvou parciálních diferenciálních rovnic

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = F_2,$$

tedy

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x + y$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3y^2 + x.$$

Integrací první rovnice dostaneme

$$U = \int (2x + y) dx = x^2 + xy + k(y).$$

Zde $k(y)$ nezávisí na x , ale může záviset na y . Najdeme ji použitím druhé rovnice:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3y^2 + x.$$

tedy

$$x + k'(y) = 3y^2 + x$$

$$k'(y) = 3y^2$$

$$k(y) = \int 3y^2 dy = y^3 + c.$$

Takže potenciál je

$$U(x, y) = x^2 + xy + y^3 + c.$$

Maple:

```
> f1:=2*x+y: f2:=3*y^2+x:
> diff(f1,y)-diff(f2,x);
0
> x:=t: y:=0:
> v1:=diff(x,t): v2:=diff(y,t):
> i1:=int(f1*v1+f2*v2,t=0..x1):
> x:=x1: y:=t:
> v1:=diff(x,t): v2:=diff(y,t):
> i2:=int(f1*v1+f2*v2,t=0..y1):
> u:=i1+i2;
u := x1^2 + y1^3 + x1 y1
```

nebo pomocí funkce `potential`

```
> f1:=2*x+y: f2:=3*y^2+x:
> linalg[potential]([f1,f2],[x,y],'u');
true
> u;
x^2 + y x^3 + y
```

Mathematica:

```
In[1]:= f1=2x+y; f2=3y^2+x;
In[2]:= D[f1,y]-D[f2,x]
Out[2]= 0
In[3]:= x=t; y=0;
```

```

In[4] := v1=D[x,t]; v2=D[y,t];
In[5] := i1=Integrate[f1*v1+f2*v2,{t,0,x1}];
In[6] := x=x1; y=t;
In[7] := v1=D[x,t]; v2=D[y,t];
In[8] := i2=Integrate[f1*v1+f2*v2,{t,0,y1}];
In[9] := u=i1+i2
          2          3
Out[9]= x1  + x1 y1 + y1

```

Příklad 9: Ověřte, že vektorové pole

$$\vec{F}(x, y, z) = (y^2 z^3, 2xy z^3, 3xy^2 z^2)$$

má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G .

Výsledek: Pole $\vec{F}$ má potenciál $U(x, y, z) = xy^2 z^3$ na množině $G = \mathbb{R}^3$.

Návod: Porovnejte $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ a $\frac{\partial F_2}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial z}$ a $\frac{\partial F_3}{\partial x}$, $\frac{\partial F_2}{\partial z}$ a $\frac{\partial F_3}{\partial y}$. Potenciál U vektorového pole $\vec{F}$ je takové skalární pole U , pro které platí $\text{grad } U = \vec{F}$.

Postup: Označíme si složky pole $F_1 = y^2 z^3$, $F_2 = 2xy z^3$, $F_3 = 3xy^2 z^2$ a spočteme parciální derivace

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial y} &= 2yz^3, & \frac{\partial F_2}{\partial x} &= 2yz^3, \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= 3y^2 z^2, & \frac{\partial F_3}{\partial x} &= 3y^2 z^2, \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= 6xyz^2, & \frac{\partial F_3}{\partial y} &= 6xyz^2.\end{aligned}$$

Vidíme, že

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

na $\mathbb{R}^3$, což je jednoduše souvislá množina, proto pole $\vec{F}$ má na $\mathbb{R}^3$ potenciál. Potenciál najdeme pomocí křivkového integrálu. Je výhodné zvolit si integrační cestu sestávající ze tří úseček rovnoběžných se souřadnicovými osami. Zvolme si počáteční bod v počátku a obecný koncový bod označme $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Potom parametrizace úseček C_1 , C_2 , C_3 mohou být

$$C_1: \quad x = t, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \tilde{x},$$

pak

$$dx = dt, \quad dy = 0, \quad dz = 0,$$

$$C_2: \quad x = \tilde{x}, \quad y = t, \quad z = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \tilde{y},$$

pak

$$dx = 0, \quad dy = dt, \quad dz = 0,$$

$$C_3: \quad x = \tilde{x}, \quad y = \tilde{y}, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \tilde{z},$$

pak

$$dx = 0, \quad dy = 0, \quad dz = dt.$$

Takže pro potenciál U platí

$$\begin{aligned} U(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) - U(0, 0, 0) &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = \\ &= \int_{C_1} (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) + \int_{C_2} (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) + \int_{C_3} (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = \\ &= 0 + 0 + \int_0^{\tilde{z}} 3\tilde{x}\tilde{y}^2 t^2 dt = \left[\tilde{x}\tilde{y}^2 t^3 \right]_0^{\tilde{z}} = \tilde{x}\tilde{y}^2 \tilde{z}^3. \end{aligned}$$

Takže potenciál je

$$U(x, y, z) = xy^2z^3 + c.$$

Maple:

```
> f1:=y^2*z^3: f2:=2*x*y*z^3: f3:=3*x*y^2*z^2:
> x:=t: y:=0: z:=0:
> v1:=diff(x,t): v2:=diff(y,t): v3:=diff(z,t):
> i1:=int(f1*v1+f2*v2+f3*v3,t=0..x1):
> x:=x1: y:=t: z:=0:
> v1:=diff(x,t): v2:=diff(y,t): v3:=diff(z,t):
> i2:=int(f1*v1+f2*v2+f3*v3,t=0..y1):
> x:=x1: y:=y1: z:=t:
> v1:=diff(x,t): v2:=diff(y,t): v3:=diff(z,t):
> i3:=int(f1*v1+f2*v2+f3*v3,t=0..z1):
> u:=i1+i2+i3;

                                2   3
                                u := x1 y1  z1
```

nebo pomocí funkce `potential`

```
> f1:=y^2*z^3: f2:=2*x*y*z^3: f3:=3*x*y^2*z^2:
> linalg[potential]([f1,f2,f3],[x,y,z], 'u');
                                true
> u;

                                2   3
                                y  z  x
```

Mathematica:

```
In[1] := f1=y^2*z^3; f2=2*x*y*z^3; f3=3*x*y^2*z^2;
In[2] := D[f1,y]-D[f2,x]
Out[2]= 0
In[3] := D[f1,z]-D[f3,x]
Out[3]= 0
In[4] := D[f2,z]-D[f3,y]
Out[4]= 0
In[5] := x=t; y=0; z=0;
In[6] := v1=D[x,t]; v2=D[y,t]; v3=D[z,t];
In[7] := i1=Integrate[f1*v1+f2*v2+f3*v3,{t,0,x1}];
In[8] := x=x1; y=t; z=0;
In[9] := v1=D[x,t]; v2=D[y,t]; v3=D[z,t];
In[10] := i2=Integrate[f1*v1+f2*v2+f3*v3,{t,0,y1}];
In[11] := x=x1; y=y1; z=t;
In[12] := v1=D[x,t]; v2=D[y,t]; v3=D[z,t];
In[13] := i3=Integrate[f1*v1+f2*v2+f3*v3,{t,0,z1}];
In[14] := u=i1+i2+i3
          2   3
Out[14]= x1 y1 z1
```

Příklad 10: Určete potenciál homogenního gravitačního pole, které působí na těleso o hmotnosti m silou mg , v kartézských souřadnicích $\vec{F} = (0, 0, -mg)$.

Výsledek: Potenciál je $U = -mgz$.

Návod: Hledáme funkci $U(x, y, z)$ splňující

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -mg.$$

Postup: Integrací třetí rovnice dostaneme $U = \int -mg \, dz = -mgz + c$. Z první a druhé rovnice plyne, že c je opravdu konstanta.

Poznámka:

Ve fyzice se pojem potenciál používá pro veličinu $-\frac{U}{m}$. Hmotností m se dělí proto, aby takto zavedený potenciál popisoval gravitační pole nezávisle na hmotnosti zkušebního tělesa m . Znaménko se volí tak, aby gravitační síla působila na těleso směrem k nižším hodnotám potenciálu (lidově řečeno: tělesa padají dolů a tam mají nižší potenciální energii).

Maple:

```
> linalg[potential]([0,0,-m*g],[x,y,z],'u');
                                     true
> u;
                                     -m g z
```

Mathematica:

```
In[1]:= Integrate[-m*g,z]
Out[1]= -(g m z)
```

Příklad 11: Ověřte, že funkce

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

je potenciálem vektorového pole

$$\vec{F} = -(x, y, z)/(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}},$$

tedy že

$$\vec{F} = \text{grad } U.$$

Výsledek: Ano, je to tak.

Návod: Potenciál U vektorového pole $\vec{F}$ je takové skalární pole U , pro které platí $\text{grad } U = \vec{F}$.

Postup: Spočteme

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Tedy

$$\text{grad } U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) = -(x, y, z)/(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Poznámka 1:

Zavedeme-li $\vec{r} = (x, y, z)$ a $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, lze psát

$$U = \frac{1}{r}$$

a

$$\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Poznámka 2:

S tímto potenciálem a s touto silou (až na násobivé konstanty) se setkáme ve fyzice při popisu gravitačního pole vyvolaného hmotným bodem a při popisu elektrostatického pole vyvolaného bodovým nábojem.

Maple:

```
> u:=1/sqrt(x^2+y^2+z^2):
> diff(u,x);
```

$$-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

```
> diff(u,y);
```

$$-\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

```
> diff(u,z);
```

$$-\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

nebo pomocí funkce `grad`

```
> u:=1/sqrt(x^2+y^2+z^2):
> linalg[grad](u,[x,y,z]);
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, & -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, & -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{bmatrix}$$

Mathematica:

```
In[1] := u=1/Sqrt[x^2+y^2+z^2];
```

```
In[2] := D[u,x]
```

```
Out[2]= -(-----)
          2      2      2 3/2
        (x  + y  + z )
```

```
In[3] := D[u,y]
```

```
Out[3]= -(-----)
          2      2      2 3/2
        (x  + y  + z )
```

```
In[4] := D[u,z]
```

$$\text{Out}[4] = -\left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right)$$

nebo najednou pomocí funkce `Outer`

```
In[1]:= u=1/Sqrt[x^2+y^2+z^2];
In[2]:= Outer[D,{u},{x,y,z}]
```

$$\text{Out}[2] = \left\{ \left\{ -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\} \right\}$$

nebo pomocí funkce `Grad`

```
In[1]:= <<Calculus`VectorAnalysis`
In[2]:= u=1/Sqrt[x^2+y^2+z^2];
In[3]:= SetCoordinates[Cartesian[x,y,z]];
In[4]:= Grad[u]
```

$$\text{Out}[4] = \left\{ -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\}$$