

Sférické kyvadlo - příprava na Lojzův seminář

Pavel Pokorný

13.března 2006

Obsah

1	Lagrangeovy rovnice pro systém bez vazeb	1
2	Sférické kyvadlo	2
3	Lagrangeovy rovnice v zobecněných souřadnicích	3
4	Energie	7
5	Použití Lagrangeových rovnic pro sférické kyvadlo	7
6	Variační princip	8
7	Hamiltonián	9
8	Rovnice sférického kyvadla bez Lagrangeových rovnic	10

1 Lagrangeovy rovnice pro systém bez vazeb

Podle druhého Newtonova pohybového zákona uděluje síla F působící na těleso o hmotnosti m tomuto tělesu zrychlení a , pro které platí

$$ma = F.$$

Označíme-li polohu hmotného bodu x , je

$$m\ddot{x} = F,$$

kde tečka značí derivaci podle času t . Lze-li sílu vyjádřit pomocí gradientu potenciálu $V(x)$ jako

$$F = -\nabla V,$$

máme

$$m\ddot{x} = -\nabla V.$$

Kinetická energie je

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

a její derivace podle rychlosti je

$$T_{\dot{x}} = m\dot{x}$$

a

$$\frac{d}{dt}T_{\dot{x}} = m\ddot{x}.$$

Pro Lagrangeovu funkci

$$L = T - V$$

tedy

$$L(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) - V(x)$$

platí

$$L_x = -\nabla V = F$$

$$L_{\dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = m\ddot{x}$$

takže

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} - L_x = 0.$$

Tento vztah se nazývá Lagrangeova rovnice.

2 Sférické kyvadlo

Uvažujme hmotný bod na konci tuhého nehmotného závěsu jednotkové délky, jehož druhý konec je upevněn kloubem otočným bez tření ve všech směrech, nejen v jedné rovině. Tento hmotný bod se tedy může pohybovat pouze po

kulové ploše s jednotkovým poloměrem. Pro jeho kartézské souřadnice tedy platí

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0,$$

obecně

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Tato vazba působí na hmotný bod silou kolmou k ploše, tedy

$$F_{vazby} = \lambda \nabla f.$$

Tím se nám zvýší o jedničku počet rovnic (přibude rovnice vazby) a také počet neznámých (přibude λ).

Jiný způsob řešení je zavedení zobecněných souřadnic (např. dva úhly ze sférických souřadnic θ, φ , obecně q_1, q_2), tak, aby vazba byla splněna identicky. Např.

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 &= \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 &= \cos \theta, \end{aligned}$$

obecně

$$x = s(q).$$

Pro jeden bod s jednou vazbou je $q \in R^2$ a $x \in R^3$. Pro N bodů s k vazbami je $q \in R^{3N-k}$ a $x \in R^{3N}$. Ukažme, že Lagrangeovy rovnice mají v zobecněných souřadnicích q formálně stejný tvar

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{q}_i} - L_{q_i} = 0.$$

To je výhodné, protože pak každá vazba sníží počet rovnic i počet neznámých o jedničku, místo aby jej zvyšovala!

3 Lagrangeovy rovnice v zobecněných souřadnicích

Uvažujme transformaci souřadnic

$$x = s(q),$$

např.

$$\begin{aligned}x_1 &= \sin q_1 \cos q_2 \\x_2 &= \sin q_1 \sin q_2 \\x_3 &= \cos q_1.\end{aligned}$$

Označme

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial s_i}{\partial q_j}$$

a pro

$$x(t) = s(q(t))$$

označme

$$u_i(q, \dot{q}) = \dot{x}_i = \frac{d}{dt}x_i = \frac{\partial s_i(q)}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

(přes index, který se vyskytuje dvakrát, se sčítá). Označme

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial u_i(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_j}.$$

Pak

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial u_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial s_i}{\partial q_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}.$$

Dále z

$$\dot{x}_i = \frac{\partial s_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

plyne

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 s_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k.$$

Ale na druhé straně z

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial s_i(q(t))}{\partial q_j}$$

plyne také

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 s_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k,$$

takže

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}.$$

Označme T kinetickou energii v kartézských souřadnicích

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}_k \dot{x}_k$$

a $\tilde{T}$ kinetickou energii v zobecněných souřadnicích

$$\tilde{T}(q, \dot{q}) = T(u(q, \dot{q})).$$

Potom

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial u_k}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial q_i}$$

a

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial u_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i}.$$

Tento součin zderivujeme podle času t

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_i} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right)$$

a odečteme přechází výsledek a dostaneme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_i} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial q_i}.$$

Na mechanický systém s vazbami působí dvě síly: vnější síla

$$F = -\nabla V(x)$$

a vazbová síla

$$F_{vazby} = \lambda \nabla f,$$

takže

$$ma = F + \lambda \nabla f$$

a tedy

$$ma - F = \lambda \nabla f.$$

Vazbová síla je kolmá na tečnou rovinu k ploše

$$f(x) = 0.$$

Výraz

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

je i -tá kartézská složka j -tého vektoru báze tečného prostoru (tečné roviny) k ploše

$$f(x) = 0,$$

takže

$$((ma)_i - F_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = 0.$$

Tento vztah upravíme na tvar Lagrangeových rovnic. Použijeme

$$(ma)_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}.$$

Potenciál vyjádříme jednak v kartézských souřadnicích

$$V = V(x)$$

a jednak v zobecněných souřadnicích

$$\tilde{V}(q) = V(s(q)).$$

Potom

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_j} = \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}.$$

Takže postupně dostáváme

$$0 = ((ma)_i - F_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_j} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_j}.$$

Označíme-li Lagrangeovu funkci v zobecněných souřadnicích

$$\tilde{L} = \tilde{T} - \tilde{V}$$

tedy

$$\tilde{L}(q, \dot{q}) = \tilde{T}(q, \dot{q}) - \tilde{V}(q),$$

máme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_i} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_i},$$

takže

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} = 0.$$

4 Energie

Lagrangeovy rovnice mají jeden důležitý integrál, zvaný zobecněná energie

$$E = L_{\dot{q}_i} \dot{q}_i - L.$$

Totíž derivace funkce

$$E(t) = L_{\dot{q}_i}(q(t), \dot{q}(t)) \dot{q}_i(t) - L(q(t), \dot{q}(t))$$

je

$$\frac{dE}{dt} = \dot{q}_i \frac{d}{dt} L_{\dot{q}_i} + L_{\dot{q}_i} \ddot{q}_i - L_{q_i} \dot{q}_i - L_{\dot{q}_i} \ddot{q}_i = \dot{q}_i \left(\frac{d}{dt} L_{\dot{q}_i} - L_{q_i} \right) = 0,$$

protože závorka je vlastně levá strana Lagrangeovy rovnice.

Je-li kinetická energie ve tvaru

$$T(q, \dot{q}) = a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

je

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) = a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q)$$

a zobecněná energie

$$E = L_{\dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + V = T + V$$

je rovna celkové mechanické energii.

5 Použití Lagrangeových rovnic pro sférické kyvadlo

Ve sférických souřadnicích vzhůru nohama

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 &= \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 &= -\cos \theta \end{aligned}$$

je kinetická energie (vlnku už psát nebudeme)

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) = \frac{1}{2} m (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$$

a potenciální energie

$$V = mgh = -mg \cos \theta.$$

Potom Lagrangeova funkce je

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + mg \cos \theta.$$

Takže Lagrangeovy rovnice

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{\theta}} - L_{\theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{\varphi}} - L_{\varphi} = 0$$

dají

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\theta}) - m \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + mg \sin \theta = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0.$$

Druhá z těchto rovnic ukazuje, že moment hybnosti vůči ose x_3 se zachovává. Protože se dále zachovává celková mechanická energie

$$E = T + V,$$

leží trajektorie systému v 2-dim varietě a tedy nemůže nastat deterministický chaos. Škoda :-)

6 Variační princip

Lagrangeovy rovnice

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{q}_i} - L_{q_i} = 0$$

lze odvodit také z podmínky, aby funkcionál

$$S(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

zvaný akce, nabýval extrémální hodnoty na množině funkcí z $C^2(\langle t_1, t_2 \rangle)$ takových, že $q(t_1)$ a $q(t_2)$ jsou pevně dány. Má-li totiž funkcionál S nabývat extrému pro funkci q , musí nabývat extrému i funkce

$$\Phi(h) = S(q + hQ) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t) + hQ(t), \dot{q}(t) + h\dot{Q}(t)) dt$$

pro libovolnou funkci $Q \in C^2(\langle t_1, t_2 \rangle)$ splňující $Q(t_1) = Q(t_2) = 0$. Nutnou podmínkou je

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d\Phi}{dh}(0) &= \int_{t_1}^{t_2} (L_q Q + L_{\dot{q}} \dot{Q}) dt = \int_{t_1}^{t_2} L_q Q dt + [L_{\dot{q}} Q]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} L_{\dot{q}} \right) Q dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(L_q - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}} \right) Q dt \end{aligned}$$

Má-li být tento integrál roven nule pro libovolnou funkci Q , musí být závorka nulová, což je právě Lagrangeova rovnice. To zůstává v platnosti i v případě, kdy q je vektorová funkce.

7 Hamiltonián

Označme

$$p_i = L_{\dot{q}_i}(q, \dot{q})$$

zobecněnou hybnost. Z této rovnice lze vyjádřit $\dot{q}$ jako funkci q a p . Označme tuto závislost r , tedy

$$\dot{q} = r(q, p).$$

Označme zobecněnou energii E jako funkci souřadnic q a p

$$H(q, p) = p_k \dot{q}_k - L = p_k r_k(q, p) - L(q, r(q, p)).$$

Tato funkce se nazývá Hamiltonova funkce čili Hamiltonián na počest irského matematika a fyzika Sira Williama Rowana Hamiltona (1805-1865), známého též jako objevitele kvaternionů.

Spočtěme její parciální derivace

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = p_k \frac{\partial r_k}{\partial q_i} - L_{q_i} - L_{\dot{q}_k} \frac{\partial r_k}{\partial q_i} = -L_{q_i} = -\frac{d}{dt} L_{\dot{q}_i} = -\frac{d}{dt} p_i = -\dot{p}_i$$

a

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = r_i(q, p) + p_k \frac{\partial r_k}{\partial p_i} - L_{\dot{q}_k} \frac{\partial r_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i.$$

Tedy časový vývoj v nových souřadnicích q, p je dán rovnicemi

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

a

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Tyto rovnice se nazývají Hamiltonovy kanonické rovnice.

Obecně, dynamický systém ODR v tomto tvaru, kde $H = H(q, p)$, se nazývá Hamiltoniánský dynamický systém.

Funkce H je integrálem pohybu i v tomto obecném případě, protože

$$\dot{H} = H_{q_i} \dot{q}_i + H_{p_i} \dot{p}_i = H_{q_i} H_{p_i} - H_{p_i} H_{q_i} = 0.$$

Hamiltoniánský dynamický systém zachovává objem ve fázovém prostoru, protože divergence vektorového pole (stopa matice prvních parciálních derivací pravé strany) je nulová, jak se lze snadno přesvědčit

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} = 0.$$

Hamiltoniánské dynamické systémy se používají pro modelování systémů, kde můžeme zanedbat ztrátu mechanické energie (např. třením). To lze v případě nebeské mechaniky a při popisu některých mikroskopických systémů. Hamiltonův aparát teoretické mechaniky se stal odrazovým můstkem pro kvantovou mechaniku.

8 Rovnice sférického kyvadla bez Lagrangeových rovnic

Na hmotný bod o hmotnosti $m = 1$ pohybující se po sféře o poloměru $l = 1$ působí dvě síly: dostředivá a tíha. Určeme si složky těchto dvou sil ve směru svislé osy. Gravitační síla se rozloží na dvě složky: kolmá na sféru (ta se vyruší pevností sféry) a tečná o velikosti

$$g \sin \theta.$$

Její svislá složka je

$$-g \sin^2 \theta.$$

Dostředivá síla je

$$v^2 = \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2$$

a její svislá složka je

$$(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \cos \theta.$$

Součet F_z těchto dvou sil uděluje tělesu zrychlení, jehož složku a_z ve směru osy z určíme tak, že dvakrát zderivujeme vztah

$$z = -\cos \theta.$$

Tedy

$$\dot{z} = \sin \theta \dot{\theta}$$

a

$$\ddot{z} = \cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta \ddot{\theta}.$$

Z

$$F_z = a_z$$

dostaneme

$$-g \sin^2 \theta + (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \cos \theta = \cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta \ddot{\theta}$$

$$-g \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \cos \theta = \sin \theta \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -g \sin \theta + \sin \theta \dot{\varphi}^2 \cos \theta,$$

tedy stejnou rovnici pro $\ddot{\theta}$ jako použitím Lagrangeových rovnic. Druhou rovnici

$$\frac{d}{dt}(m \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0.$$

dostaneme prostou úvahou, že moment sil působících na těleso vůči ose z je nulový, tedy musí být i nulová časová změna momentu hybnosti vůči této ose.

Literatura

- [1] Horský J., Novotný J., Štefaník M.: *Mechanika ve fyzice*. Academia Praha 2001.