

Kapitola 13

Geometrie v $\mathbb{R}^n$ zvláště v $\mathbb{R}^3$

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%   Resene priklady ke kapitole 13
%   "Geometrie v R^n zvlaste v R^3" skript
%   "Matematika I ve strukturovanem studiu"
%   vcetne reseni pomoci Maple a Mathematica
%   Sun Jun 26 13:34:29 CEST 2005
%   http://www.vscht.cz/mat/Pavel.Pokorny/students
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

13.1 Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$

Příklad: Určete vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$ s počátečním bodem $A = (2, 3, 0)$ a koncovým bodem $B = (9, 9, 1)$.

Výsledek: $\vec{v} = (7, 6, 1)$.

Postup: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (9, 9, 1) - (2, 3, 0) = (7, 6, 1)$.

Maple:

```
> a:=<2,3,0>;
```

```

[2]
[ ]
a := [3]
[ ]
[0]
```

```
> b:=<9,9,1>;
```

```
      [9]
      [ ]
b := [9]
      [ ]
      [1]
```

```
> v:=b-a;
```

```
      [7]
      [ ]
v := [6]
      [ ]
      [1]
```

Mathematica:

```
In[1] := a={2,3,0}
Out[1]= {2, 3, 0}
In[2] := b={9,9,1}
Out[2]= {9, 9, 1}
In[3] := v=b-a
Out[3]= {7, 6, 1}
```

13.1.1 Vzdálenost bodů v $\mathbb{R}^n$

Příklad: Určete vzdálenost bodů $A = (2, 3, 0)$ a $B = (9, 9, 1)$.

Výsledek: Vzdálenost bodů A a B je $\rho(A, B) = \sqrt{86} \doteq 9,27$.

Postup: $\rho(A, B) = \sqrt{(9-2)^2 + (9-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{86} \doteq 9,27$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<2,3,0>;
```

```
      [2]
      [ ]
a := [3]
      [ ]
      [0]
```

```

> b:={9,9,1};

      [9]
      [ ]
b := [9]
      [ ]
      [1]

> v:=b-a;

      [7]
      [ ]
v := [6]
      [ ]
      [1]

> r:=Norm(v,2);

      1/2
r := 86

> evalf(r);

9.273618495

```

Mathematica:

```

In[1]:= a={2,3,0}
Out[1]= {2, 3, 0}
In[2]:= b={9,9,1}
Out[2]= {9, 9, 1}
In[3]:= v=b-a
Out[3]= {7, 6, 1}
In[4]:= r=Norm[v]
Out[4]= Sqrt[86]
In[5]:= N[r]
Out[5]= 9.27362

```

13.2 Norma a úhel vektorů

13.2.1 Skalární součin a norma vektorů

Příklad: Spočítejte skalární součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Výsledek: Skalární součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je $\vec{u} \cdot \vec{v} = 27$.

Postup: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 2, 4) \cdot (1, 2, 5) = 3 \times 1 + 2 \times 2 + 4 \times 5 = 27$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> u:=<3,2,4>;
                                     [3]
                                     [ ]
u := [2]
                                     [ ]
                                     [4]
> v:=<1,2,5>;
                                     [1]
                                     [ ]
v := [2]
                                     [ ]
                                     [5]
> u.v;
27
```

Mathematica:

```
In[1] := u={3,2,4}
Out[1]= {3, 2, 4}
In[2] := v={1,2,5}
Out[2]= {1, 2, 5}
In[3] := u.v
Out[3]= 27
```

Příklad: Spočtěte normu vektoru $\vec{v} = (2, 3, 4)$.

Výsledek: Norma vektoru $\vec{v}$ je $||\vec{v}|| = \sqrt{29} \doteq 5,385$.

Postup: $||\vec{v}|| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> v:=<2,3,4>;
                                     [2]
                                     [ ]
v := [3]
                                     [ ]
```

[4]

```
> r:=Norm(v,2);
```

```
1/2
r := 29
```

```
> evalf(r);
```

```
5.385164807
```

Mathematica:

```
In[1]:= v={2,3,4}
```

```
Out[1]= {2, 3, 4}
```

```
In[2]:= r=Norm[v]
```

```
Out[2]= Sqrt[29]
```

```
In[3]:= N[r]
```

```
Out[3]= 5.38516
```

13.2.2 Úhel vektorů

Příklad: Spočítejte úhel vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Výsledek: Úhel vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je $\varphi \doteq 24^\circ$.

Postup:

$$\begin{aligned}\varphi &= \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \arccos \frac{3 \times 1 + 2 \times 2 + 4 \times 5}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2}} = \\ &= \arccos\left(9\sqrt{\frac{3}{290}}\right) \doteq 0,414 \text{ rad} \doteq 24^\circ.\end{aligned}$$

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
```

```
> u:=<3,2,4>;
```

```
[3]
[ ]
u := [2]
[ ]
[4]
```

```

> v:=<1,2,5>;

                                [1]
                                [ ]
                                [2]
                                [ ]
                                [5]
> uhel:=arccos(u.v/( Norm(u,2)*Norm(v,2) ));

                                1/2    1/2
                                9 29    30
                                -----
uhel := arccos(-----)
                                290

> evalf(uhel);

                                0.4143312975

> evalf(uhel*180/Pi);

                                23.73943466

```

Mathematica:

```

In[1]:= u={3,2,4}
Out[1]= {3, 2, 4}
In[2]:= v={1,2,5}
Out[2]= {1, 2, 5}
In[3]:= uhel=ArcCos[u.v/(Norm[u]*Norm[v])]
                                3
Out[3]= ArcCos[9 Sqrt[---]]
                                290

In[4]:= N[uhel]
Out[4]= 0.414331
In[5]:= N[uhel*180/Pi]
Out[5]= 23.7394

```

13.2.3 Jednotkový vektor. Pravoúhlá složka vektoru

Příklad: Najděte jednotkový vektor příslušný k vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Výsledek: Jednotkový vektor příslušný k vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$ je vektor $\vec{v}_0 = (3/5, 0, 4/5)$.

Postup: Příslušný jednotkový vektor je

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6^2 + 0^2 + 8^2}} (6, 0, 8) = \frac{1}{10} (6, 0, 8) = (3/5, 0, 4/5).$$

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> v:=<6,0,8>;
```

```

[6]
[ ]
v := [0]
[ ]
[8]
```

```
> v0:=v/Norm(v,2);
```

```

[3/5]
[ ]
v0 := [ 0 ]
[ ]
[4/5]
```

Mathematica:

```
In[1]:= v={6,0,8}
Out[1]= {6, 0, 8}
In[2]:= v0=v/Norm[v]
          3      4
Out[2]= {-, 0, -}
          5      5
```

Příklad: Najděte pravoúhlou složku vektoru $\vec{u} = (1, 1, 5)$ ve směru vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Výsledek: Pravoúhlá složka vektoru $\vec{u}$ ve směru vektoru $\vec{v}$ je $\vec{p} = (69/25, 0, 92/25)$.

Postup:

$$\vec{p} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{1 \times 6 + 1 \times 0 + 5 \times 8}{6^2 + 0^2 + 8^2} (6, 0, 8) = (69/25, 0, 92/25).$$

Maple:

```

> with(LinearAlgebra):
> u:=<1,1,5>;

[1]
[ ]
u := [1]
[ ]
[5]

> v:=<6,0,8>;

[6]
[ ]
v := [0]
[ ]
[8]

> p:=u.v/(v.v)*v;

[69 ]
[-- ]
[25 ]
[ ]
p := [ 0 ]
[ ]
[92 ]
[-- ]
[25 ]

```

Mathematica:

```

In[1] := u={1,1,5}
Out[1]= {1, 1, 5}
In[2] := v={6,0,8}
Out[2]= {6, 0, 8}
In[3] := p=u.v/(v.v)*v
          69      92
Out[3]= {- -, 0, - -}
          25      25

```

13.2.4 Vektorový součin

Příklad: Spočítejte vektorový součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Výsledek: Vektorový součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je $\vec{u} \times \vec{v} = (2, -11, 4)$.

Postup:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (2 \times 5 - 4 \times 2, 4 \times 1 - 3 \times 5, 3 \times 2 - 2 \times 1) = (2, -11, 4).$$

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> u:=<3,2,4>;
```

```
      [3]
      [ ]
u := [2]
      [ ]
      [4]
```

```
> v:=<1,2,5>;
```

```
      [1]
      [ ]
v := [2]
      [ ]
      [5]
```

```
> w:=CrossProduct(u,v);
```

```
      [ 2]
      [ ]
w := [-11]
      [ ]
      [ 4]
```

Mathematica:

```
In[1] := u={3,2,4}
```

```
Out[1]= {3, 2, 4}
```

```
In[2] := v={1,2,5}
```

```
Out[2]= {1, 2, 5}
```

```
In[3] := w=Cross[u,v]
```

```
Out[3]= {2, -11, 4}
```

13.2.5 Smíšený součin

Příklad: Spočítejte smíšený součin vektorů $\vec{a} = (7, 4, 5)$, $\vec{b} = (2, 8, 3)$ a $\vec{c} = (1, 9, 6)$.

Výsledek: Smíšený součin vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$ je 161.

Postup:

$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 3 \\ 1 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 161$$

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<7,4,5>;
                                     [7]
                                     [ ]
a := [4]
                                     [ ]
                                     [5]
> b:=<2,8,3>;
                                     [2]
                                     [ ]
b := [8]
                                     [ ]
                                     [3]
> c:=<1,9,6>;
                                     [1]
                                     [ ]
c := [9]
                                     [ ]
                                     [6]
> v:=a.CrossProduct(b,c);
v := 161
```

Mathematica:

```
In[1] := a={7,4,5}
Out[1]= {7, 4, 5}
In[2] := b={2,8,3}
Out[2]= {2, 8, 3}
In[3] := c={1,9,6}
Out[3]= {1, 9, 6}
In[4] := v=a.Cross[b,c]
Out[4]= 161
```

```
(* a nebo máme i jinou možnost: pomocí determinantu *)
In[5] := Det[{a,b,c}]
Out[5] = 161
```

13.3 Parametrické rovnice přímky

Příklad: Určete parametrické rovnice přímky AB , je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$.

Výsledek: Parametrické rovnice přímky jsou

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2 + 3t \\ z &= 4 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Postup: Obecný bod přímky AB je $X(t) = A + t(B - A) = (1, 2, 4) + t(2 - 1, 5 - 2, 3 - 4) = (1, 2, 4) + t(1, 3, -1)$.

Maple:

```
> a:=<1,2,4>: b:=<2,5,3>: x:=a+t*(b-a);
      [ 1 + t ]
      [      ]
      x := [2 + 3 t]
      [      ]
      [ 4 - t ]
```

Mathematica:

```
In[1] := a={1,2,4};b={2,5,3};x=a+t*(b-a)
Out[1] = {1 + t, 2 + 3 t, 4 - t}
```

Příklad: Určete společné body přímek AB a CD , je-li $A = (3, 4, 3)$, $B = (4, 5, 5)$, $C = (8, 0, 10)$, $D = (12, -2, 16)$.

Výsledek: Přímky mají jediný společný bod $P = (2, 3, 1)$.

Postup: Obecný bod přímky AB je $X(t) = A + t(B - A)$ a obecný bod přímky CD je $Y(s) = C + s(D - C)$. Soustava třech lineárních rovnic o dvou neznámých t, s

$$X(t) = Y(s),$$

tedy

$$\begin{aligned} 3 + t &= 8 + 4s \\ 4 + t &= -2s \\ 3 + 2t &= 10 + 6s \end{aligned}$$

má jediné řešení $t = -1$, $s = -3/2$, takže přímky mají jediný společný bod $P = (2, 3, 1)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<3,4,3>: b:=<4,5,5>: c:=<8,0,10>: d:=<12,-2,16>:
> m:=<b-a|c-d|c-a>:
> r:=LinearSolve(m);
```

$$r := \begin{bmatrix} -1 \\ \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

```
> p:=a+r[1]*(b-a);
```

$$p := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mathematica:

```
In[1] := a={3,4,3};b={4,5,5};c={8,0,10};d={12,-2,16};
In[2] := x=a+t(b-a);y=c+s(d-c);
In[3] := r=Solve[x==y]
```

$$\text{Out}[3] = \left\{ \left\{ s \rightarrow -\frac{3}{2}, t \rightarrow -1 \right\} \right\}$$

```
In[4] := x /. r
Out[4] = {{2, 3, 1}}
```

```
In[5] := y /. r
Out[5] = {{2, 3, 1}}
```

Příklad: Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD , je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (8, 9, 1)$ a $D = (6, 4, 7)$.

Výsledek: Přímky jsou mimoběžné, jejich vzdálenost je $v = \sqrt{\frac{600}{31}} \doteq 4,4$.

Postup: Nejdříve zjistíme, mají-li přímky společné body. Obecný bod přímky AB je $X(t) = A + t(B - A)$ a obecný bod přímky CD je $Y(s) = C + s(D - C)$. Soustava

$$X(t) = Y(s)$$

třech lineárních rovnic o dvou neznámých t, s nemá řešení, protože hodnost matice soustavy

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

je 2, zatímco hodnost rozšířené matice

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \\ -1 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

je 3, takže přímky nemají žádný společný bod, což je typický případ pro dvě přímky v prostoru dimenze větší než 2. Mohou být tedy rovnoběžné nebo mimoběžné. To rozhodneme porovnáním jejich směrových vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$. Ty tvoří sloupce matice M_1 . Její hodnost je 2, tedy směrové vektory jsou lineárně nezávislé a přímky jsou mimoběžné. Vzdálenost přímek určíme jako odmocninu z minima funkce dvou proměnných

$$w(t, s) = (X(t) - Y(s)) \cdot (X(t) - Y(s)).$$

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<1,2,4>: b:=<2,5,3>: c:=<8,9,1>: d:=<6,4,7>:
> x:=a+t*(b-a): y:=c+s*(d-c):
> m1:=<b-a|c-d>;

               [ 1      2]
               [      ]
m1  :=  [ 3      5]
               [      ]
               [-1     -6]

> m2:=<b-a|c-d|c-a>;

               [ 1      2      7]
               [      ]
m2  :=  [ 3      5      7]
               [      ]
               [-1     -6     -3]

> Rank(m1);
```

```

> Rank(m2);
3
> w:=minimize((x-y).(x-y));
600
w := ---
31
> v:=evalf(sqrt(w));
v := 4.399413452

```

Mathematica:

```

In[1] := a={1,2,4};b={2,5,3};c={8,9,1};d={6,4,7};
In[2] := x=a+t*(b-a); y=c+s*(d-c);
In[3] := m1={b-a,c-d}
Out[3] = {{1, 3, -1}, {2, 5, -6}}
In[4] := m2={b-a,c-d,c-a}
Out[4] = {{1, 3, -1}, {2, 5, -6}, {7, 7, -3}}
In[5] := MatrixRank[m1]
Out[5] = 2
In[6] := MatrixRank[m2]
Out[6] = 3
In[7] := w=Minimize[(x-y).(x-y),{t,s}]
600      79      4
Out[7] = {---, {t -> --, s -> --}}
31      31      31
In[8] := v=N[Sqrt[w[[1]]]]
Out[8] = 4.39941

```

Příklad: Určete souřadnice těžiště T trojúhelníku ABC , kde $A = (4, 2, 8)$, $B = (3, 7, 1)$, $C = (8, 9, 6)$.

Výsledek: Těžiště má souřadnice $T = (5, 6, 5)$.

Postup: $T = (A + B + C)/3 = ((4 + 3 + 8)/3, (2 + 7 + 9)/3, (8 + 1 + 6)/3) = (5, 6, 5)$.

Maple:

```

> a:=<4,2,8>; b:=<3,7,1>; c:=<8,9,6>;
> t:=(a+b+c)/3;
[5]
[ ]

```

```
t := [6]
      [ ]
      [5]
```

Mathematica:

```
In[1] := a={4,2,8}; b={3,7,1}; c={8,9,6};
In[2] := t=(a+b+c)/3
Out[2]= {5, 6, 5}
```

13.4 Parametrické rovnice roviny

Příklad: Určete parametrické rovnice roviny ABC , je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (6, 2, 8)$.

Výsledek: Parametrické rovnice roviny ABC jsou

$$\begin{aligned} x &= 1 + t + 5s \\ y &= 2 + 3t \\ z &= 4 - t + 4s, \quad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Postup: Obecný bod roviny ABC je $X(t) = A + t(B - A) + s(C - A) = (1, 2, 4) + t(2 - 1, 5 - 2, 3 - 4) + s(6 - 1, 2 - 2, 8 - 4) = (1, 2, 4) + t(1, 3, -1) + s(5, 0, 4)$.

Maple:

```
> a:=<1,2,4>; b:=<2,5,3>; c:=<6,2,8>; x:=a+t*(b-a)+s*(c-a);
      [1 + t + 5 s]
      [           ]
x := [ 2 + 3 t   ]
      [           ]
      [4 - t + 4 s]
```

Mathematica:

```
In[1] := a={1,2,4}; b={2,5,3}; c={6,2,8}; x=a+t*(b-a)+s*(c-a)
Out[1]= {1 + 5 s + t, 2 + 3 t, 4 + 4 s - t}
```

Příklad: Určete společné body roviny ABC a přímky DE , je-li $A = (4, 2, 7)$, $B = (1, 9, 4)$, $C = (2, 5, 0)$, $D = (3, 6, 8)$, $E = (9, 1, 7)$.

Výsledek: Rovina a přímka mají jediný společný bod

$P = (42/17, 219/34, 275/34)$.

Postup: Obecný bod roviny ABC je $X(t, s) = A + t(B - A) + s(C - A)$ a obecný bod přímky DE je $Y(u) = D + u(E - D)$. Soustava třech lineárních rovnic o třech neznámých t, s, u

$$X(t, s) = Y(u),$$

tedy

$$\begin{aligned} 4 - 2s - 3t &= 3 + 6u \\ 2 + 3s + 7t &= 6 - 5u \\ 7 - 7s - 3t &= 8 - u \end{aligned}$$

má jediné řešení $t = 73/85$, $s = -89/170$, $u = -3/34$, takže rovina a přímka mají jediný společný bod $P = (42/17, 219/34, 275/34)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<4,2,7>: b:=<1,9,4>: c:=<2,5,0>: d:=<3,6,8>: e:=<9,1,7>:
> m:=<b-a|c-a|d-e|d-a>:
> r:=LinearSolve(m);

[73 ]
[-- ]
[85 ]
[  ]
[-89]
r := [---]
[170]
[  ]
[-3 ]
[-- ]
[34 ]

> pr:=a+r[1]*(b-a)+r[2]*(c-a);

[42 ]
[-- ]
[17 ]
[  ]
[219]
pr := [---]
```

```

[34 ]
[   ]
[275]
[---]
[34 ]

> pp:=d+r[3]*(e-d);

[42 ]
[-- ]
[17 ]
[   ]
[219]
pp := [---]
[34 ]
[   ]
[275]
[---]
[34 ]

```

Mathematica:

```

In[1]:= a={4,2,7}; b={1,9,4}; c={2,5,0}; d={3,6,8}; e={9,1,7};
In[2]:= x=a+t(b-a)+s(c-a);y=d+u(e-d);
In[3]:= r=Solve[x==y]
Out[3]= {{s -> -(---), t -> --, u -> -(---)}}
          89      73      3
          170     85     34

In[4]:= x /. r
          42  219  275
Out[4]= {{--, ---, ---}}
          17  34   34

In[5]:= y /. r
          42  219  275
Out[5]= {{--, ---, ---}}
          17  34   34

```

13.5 Obecná rovnice roviny v $\mathbb{R}^3$

Příklad: Určete vzdálenost bodu $A = (3, 2, 7)$ od roviny σ , jejíž obecná

rovnice je $5x + 2y - z + 9 = 0$.

Výsledek: Vzdálenost bodu A od roviny σ je $7\sqrt{\frac{3}{10}} \doteq 3,83$.

Postup: Vzdálenost bodu $A = (x_0, y_0, z_0)$ od roviny σ s obecnou rovnicí $\vec{n} \cdot X + d = 0$, kde $\vec{n} = (a, b, c)$ je normálový vektor roviny, je

$$\begin{aligned} v(A, \sigma) &= \frac{|\vec{n} \cdot A + d|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(a, b, c) \cdot (x_0, y_0, z_0) + d|}{\|(a, b, c)\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \\ &= \frac{|5 \times 3 + 2 \times 2 - 7 + 9|}{\sqrt{5^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 7\sqrt{\frac{3}{10}} \doteq 3,83. \end{aligned}$$

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<3,2,7>: n:=<5,2,-1>: d:=9: v:=abs(n.a+d)/Norm(n,2);
                                     1/2
                                     7 30
v := -----
                                     10

> evalf(v);
3.834057902
```

Mathematica:

```
In[1]:= a={3,2,7}; n={5,2,-1}; d=9; v=Abs[n.a+d]/Norm[n]
3
Out[1]= 7 Sqrt[--]
10

In[2]:= N[v]
Out[2]= 3.83406
```

Příklad: Najděte obecnou rovnici roviny σ procházející body $A = (3, 7, 2)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (5, 8, 4)$.

Výsledek: Obecná rovnice roviny je $-10x - 2y + 11z + 22 = 0$.

Postup: Normálový vektor roviny je kolný na každý vektor roviny, tedy i na vektory $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -6, -2)$ a $\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 1, 2)$. To splňuje vektorový součin

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-10, -2, 11).$$

Absolutní člen d v rovnici $-10x - 2y + 11z + d = 0$ určíme dosazením souřadnic libovolného z bodů A , B nebo C , např. A : $d = -\vec{n} \cdot A = -(-10, -2, 11) \cdot (3, 7, 2) = 22$. Obecná rovnice roviny je potom $-10x - 2y + 11z + 22 = 0$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<3,7,2>: b:=<2,1,0>: c:=<5,8,4>:
> n:=CrossProduct(b-a,c-a);
                                     [-10]
                                     [  ]
n := [ -2]
                                     [  ]
                                     [ 11]

> d:=-n.a;
                                     d := 22
```

Mathematica:

```
In[1]:= a={3,7,2}; b={2,1,0}; c={5,8,4};
In[2]:= n=Cross[(b-a),(c-a)]
Out[2]= {-10, -2, 11}
In[3]:= d=-n.a
Out[3]= 22
```

Příklad: Vypočítejte vzdálenost bodu A od přímky BC , je-li $A = (0, 5, 1)$, $B = (2, 3, 9)$, $C = (4, 7, 6)$.

Výsledek: Vzdálenost bodu A od přímky BC je $2\sqrt{\frac{326}{29}} \doteq 6,7$.

Postup: Obecný bod přímky BC je

$$X(t) = B + t(C - B).$$

Směrový vektor $\overrightarrow{BC} = C - B$ této přímky je současně normálový vektor roviny kolmé na přímku BC . Tedy obecná rovnice roviny σ kolmé na přímku BC jdoucí bodem A je

$$(C - B) \cdot X = (C - B) \cdot A.$$

Pozor! Tuto rovnici nelze závorkou $(C - B)$ vydělit, protože nejde o součin čísel, ale o skalární součin vektorů. Tato rovnice neříká, že X se rovná A , ale

pouze, že průmět X do $(C - B)$ se rovná průmětu A do $(C - B)$. V důsledku toho nelze ve zlomcích krátit vektor, který se objevuje ve skalárním součinu.

Hodnotu parametru t odpovídající průsečíku přímky BC s rovinou σ najdeme z rovnice

$$(C - B) \cdot (B + t(C - B)) = (C - B) \cdot A$$

$$(C - B) \cdot B + t(C - B) \cdot (C - B) = (C - B) \cdot A$$

$$t = \frac{(C - B) \cdot (A - B)}{(C - B) \cdot (C - B)}.$$

Tuto hodnotu parametru t dosadíme do parametrické rovnice přímky BC a dostaneme bod P přímky BC , který je nejbližší bodu A

$$P = B + \frac{(C - B) \cdot (A - B)}{(C - B) \cdot (C - B)}(C - B).$$

Potom vzdálenost v bodu A od přímky BC je rovna vzdálenosti bodu A od bodu P

$$v = \|AP\| = \|P - A\| = \|B - A + \frac{(C - B) \cdot (A - B)}{(C - B) \cdot (C - B)}(C - B)\|.$$

Tento obecný výsledek je vhodný při použití počítače, protože potom stačí zadat pouze souřadnice daných bodů a tento výsledný vztah.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<0,5,1>: b:=<2,3,9>: c:=<4,7,6>:
> p:=b+((c-b).(a-b))*(c-b)/((c-b).(c-b));
[114]
[---]
[29 ]
[  ]
[199]
p := [---]
[29 ]
[  ]
[177]
[---]
```

```

[29 ]
> v:=Norm(p-a,2);
                                     1/2
                                     2 9454
v := -----
                                     29

> evalf(v);
6.705633247

```

Mathematica:

```

In[1]:= a={0,5,1}; b={2,3,9}; c={4,7,6};
In[2]:= p=b+((c-b).(a-b))*(c-b)/((c-b).(c-b))
          114  199  177
Out[2]= {---, ---, ---}
          29   29   29
In[3]:= v=Norm[p-a]
          326
Out[3]= 2 Sqrt[---]
          29
In[4]:= N[v]
Out[4]= 6.70563

```

Příklad: Určete bod S souměrně sdružený s bodem $P = (3, -1, 0)$ podle roviny ABC procházející body $A = (-1, 5, 0)$, $B = (3, -2, 1)$, $C = (0, 2, 4)$.

Výsledek: Bod S má souřadnice $S = (17/7, -47/35, -4/35)$.

Postup: Nejprve najdeme normálový vektor $\vec{n}$ roviny ABC

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}.$$

Obecná rovnice roviny ABC je

$$\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A.$$

Bodem P vedeme přímkou p kolmou k rovině ABC

$$X(t) = P + t\vec{n}.$$

Najdeme hodnotu parametru t_R příslušející průsečíku R přímky p s rovinou ABC

$$\vec{n} \cdot (P + t\vec{n}) = \vec{n} \cdot A$$

$$t_R = \frac{\vec{n} \cdot (A - P)}{\vec{n} \cdot \vec{n}}.$$

Hodnota parametru t_S příslušející bodu S bude

$$t_S = 2t_R.$$

Potom bod S bude

$$S = P + t_S \vec{n} = P + 2 \frac{\vec{n} \cdot (A - P)}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n}.$$

Tento způsob výpočtu, kdy nejprve najdeme obecný výsledek a teprve potom dosadíme konkrétní číselné hodnoty, je vhodný při použití počítače.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> p:=<3,-1,0>: a:=<-1,5,0>: b:=<3,-2,1>: c:=<0,2,4>:
> n:=CrossProduct(b-a,c-a):
> s:=p+2*(n.(a-p))/(n.n)*n;
```

```

[17/7]
[    ]
[-47 ]
[--- ]
s := [35 ]
[    ]
[ -4 ]
[ -- ]
[ 35 ]
```

Mathematica:

```
In[1] := p={3,-1,0}; a={-1,5,0}; b={3,-2,1}; c={0,2,4};
In[2] := n=Cross[b-a,c-a];
In[3] := s=p+2(n.(a-p))/(n.n)n
```

```

      17      47      4
Out[3]= {--, -(--), -(--)}
        7      35      35
```