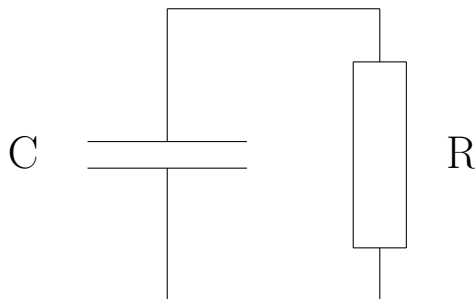


1 Elektrický obvod s kondenzátorem a odporem

Uvažujme elektrický kondenzátor o kapacitě $C = 10 \mu\text{F}$ nabitý na napětí $U_0 = 30 \text{ V}$, který je vybíjen připojeným odporem $R = 5 \text{ M}\Omega$. Určete napětí na kondenzátoru po jedné minutě.



Obrázek 1: Elektrický obvod s kondenzátorem a odporem

Řešení:

Časová derivace napětí U na kondenzátoru je přímo úměrná proudu I

$$C \frac{dU}{dt} = -I.$$

Záporné znaménko značí, že kladný proud vybíjí kondenzátor, tedy napětí na kondenzátoru klesá v čase. Podle Ohmova zákona je proud

$$I = \frac{U}{R},$$

tedy

$$C \frac{dU}{dt} = -\frac{U}{R},$$

to je lineární autonomní diferenciální rovnice prvního řádu

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{U}{RC}.$$

Tuto rovnici lze řešit metodou separace proměnných. Funkce $U(t) = 0$ pro $t \in R$ je řešení diferenciální rovnice, ale toto řešení nesplňuje počáteční podmínku $U(0) = 30 \text{ V}$. Pro $U \neq 0$ odseparujeme proměnné

$$\frac{dU}{U} = -\frac{1}{RC} dt$$

$$\int \frac{dU}{U} = \int -\frac{1}{RC} dt$$

$$\ln |U| = -\frac{1}{RC} t + k_1$$

$$|U| = \exp(k_1) \exp\left(-\frac{1}{RC} t\right).$$

Nyní budeme uvažovat tři případy, totiž je-li U kladné, záporné nebo nulové. Pro $U > 0$ lze absolutní hodnotu odstranit a při zavedení $k_2 = \exp(k_1)$ dostaneme

$$U = k_2 \exp\left(-\frac{1}{RC} t\right), \quad \text{kde } k_2 > 0.$$

Pro $U < 0$ bude $|U| = -U$, znaménko minus převedeme na pravou stranu, zavedeme $k_2 = -\exp(k_1)$ a dostaneme

$$U = k_2 \exp\left(-\frac{1}{RC} t\right), \quad \text{kde } k_2 < 0.$$

A pro $U = 0$ zavedeme $k_2 = 0$, abychom dostali

$$U = k_2 \exp\left(-\frac{1}{RC} t\right), \quad \text{kde } k_2 = 0.$$

Tyto tři výsledky lze shrnout do jednoho společného

$$U = k_2 \exp\left(-\frac{1}{RC} t\right), \quad \text{kde } k_2 \in \mathbb{R}.$$

Integrační konstanta k_2 má význam počátečního napětí $U(0)$ v čase $t = 0$, tedy

$$U(t) = U(0) \exp\left(-\frac{1}{RC} t\right).$$

S použitím zadaných hodnot $C = 10 \mu\text{F}$, $R = 5 \text{ M}\Omega$, $U_0 = 30 \text{ V}$, bude napětí v čase $t = 60 \text{ s}$ rovno

$$U(60) = 30 \exp\left(-\frac{60}{50}\right) = 9.036 \text{ V}.$$

Tedy, závěr je: napětí na kondenzátoru po jedné minutě klesne z 30 V na přibližně 9 V .

18.3.2019
Pavel.Pokorny@vscht.cz