Řetězovka

Abstrakt:
Ukážeme si, že řetěz pověšený mezi dvěma body v homogenním gravitačním poli se prohne ve tvaru grafu funkce hyperbolický kosinus. Odvození provedeme dvojím způsobem: pomocí rovnováhy sil a pomocí minima potenciální energie.

1 Přípravy

Funkce hyperbolický kosinus a hyperbolický sinus jsou definovány výrazy

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

Snadno lze ověřit

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ (\cosh x)' &= \sinh x \\ (\sinh x)' &= \cosh x \end{aligned}$$

a použitím substituce $u = e^x$ a řešením kvadratické rovnice dostaneme inverzní funkce

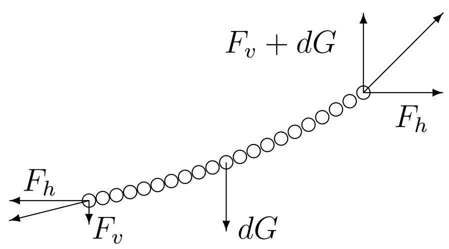
$$\begin{aligned} \operatorname{arccosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ \operatorname{arcsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \end{aligned}$$

a jejich derivace

$$\begin{aligned} (\operatorname{arccosh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ (\operatorname{arcsinh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

2 Odvození pomocí rovnováhy sil

Uvažujme malý kousek zavěšeného řetězu, viz. obrázek.



Sílu, která působí na levý konec tohoto kousku řetězu rozložíme na horizontální složku F_h a vertikální složku F_v. Na pravý konec tohoto kousku řetězu pak působí horizontální síla stejně velká, ale opačně orientovaná, a vertikální složka $F_v + dG$, kde dG je tíha kousku řetězu. Uvažujeme homogenní gravitační pole s tíhovým zrychlením g. Pak je tíha kousku řetězu $dG = g\,dm$, kde dm je hmotnost kousku řetězu. Označme délkovou hustotu řetězu ϱ, potom $dm = \varrho\,dl$, kde dl je délka kousku řetězu. Lze-li tvar řetězu popsat grafem funkce $y = y(x)$, je $dl = \sqrt{1 + y'^2}dx$.

Síly na koncích kousku řetězu působí v tečném směru. Označme vodorovnou souřadnici levého konce x a pravého konce $x + dx$. Pak v levém bodě platí $\frac{F_v}{F_h} = y'(x)$ a v pravém bodě $\frac{F_v+dG}{F_h} = y'(x + dx)$. Změna první derivace určuje druhou derivaci $y''(x) = \frac{y'(x+dx)-y'(x)}{dx} = \frac{dG}{F_h\,dx} = \frac{g\varrho}{F_h}\sqrt{1 + y'^2}$. Označme $\alpha = \frac{g\varrho}{F_h}$, pak

$$y''(x) = \alpha\sqrt{1 + y'^2}.$$

To je diferenciální rovnice pro neznámou funkci $y = y(x)$. Tu vyřešíme metodou separace proměnných:

$$\begin{aligned}
\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} &= \alpha\,dx \\
\int \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} &= \int \alpha\,dx \\
\operatorname{arcsinh} y' &= \alpha x + c_1 \\
y' &= \sinh(\alpha x + c_1) \\
y &= c_2 + \frac{1}{\alpha}\cosh(\alpha x + c_1).
\end{aligned}$$

3 Odvození pomocí minima potenciální energie

Řetěz upevněný ve dvou bodech zaujme tvar, kdy celková potenciální energie bude minimální. Přitom jeho délka zůstane konstantní. Jestliže tvar řetězu lze popsat grafem funkce $y = y(x)$, je element délky $dl = \sqrt{1+y'^2}dx$ a celková délka je

$$L = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

kde x_1 a x_2 jsou souřadnice bodů uchycení řetězu. Potenciální energie kousku řetězu je $dW = g\,y\,dm$, kde g je tíhové zrychlení, y je výška elementu řetězu a dm je jeho hmotnost. Použitím délkové hustoty ϱ lze psát $dm = \varrho\,dl$, takže celková potenciální energie řetězu je

$$W = \int\limits_{x_1}^{x_2} g\varrho y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Označíme-li $w(f,f') = g\varrho f\sqrt{1+f'^2}$ a $l(f,f') = \sqrt{1+f'^2}$ je délka a potenciální energie řetězu

$$W(f) = \int\limits_{x_1}^{x_2} w(f,f')\,dx,$$

$$L(f) = \int\limits_{x_1}^{x_2} l(f,f')\,dx.$$

Jestliže potenciální energie W nabývá minima pro funkci f, pak musí funkce $\tilde{W}(\varepsilon) = W(f+\varepsilon h)$ nabývat minima a tedy mít nulovou derivaci pro číslo $\varepsilon = 0$ pro libovolnou funkci $h(x)$ splňující okrajové podmínky $h(x_1) = 0$ a $h(x_2) = 0$.

Označíme-li w_f a $w_{f'}$ parciální derivace funkce w podle prvního a podle druhého argumentu, dostaneme (integrací per partes a využitím okrajových podmínek)

$$0 = \tilde{W}'(0) = \int\limits_{x_1}^{x_2} (w_f h + w_{f'} h')\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} (w_f h - w'_{f'} h)\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} (w_f - w'_{f'}) h\,dx.$$

Kdyby nebylo podmínky, že délka řetězu je konstantní, potom bude tento integrál nulový pro libovolnou funkci h pouze tehdy, když bude nulová závorka $(w_f - w'_{f'}) = 0$. Tato závorka odpovídá gradientu funkce, jejíž minimum hledáme.

Funkce h popisuje změnu tvaru řetězu. Uvažujeme pouze takové změny tvaru, které nemění délku řetězu. To představuje podmínku neboli vazbu na možné změny tvaru řetězu. Tato podmínka je dána rovnicí $L =$ konst. Označíme-li $\tilde{L}(\varepsilon) = L(f + \varepsilon h)$, pak gradient této vazbové funkce je $(l_f - l'_{f'})$.

Hledáme-li extrém funkce na množině $L =$ konst, musí být gradient minimalizované funkce rovnoběžný s gradientem vazbové funkce, tedy musí být roven násobku, zde λ násobku

$$w_f - w'_{f'} = \lambda(l_f - l'_{f'}).$$

Pro

$$w(f, f') = g\varrho f\sqrt{1 + f'^2}$$

máme

$$w_f = g\varrho\sqrt{1 + f'^2}$$

a

$$w_{f'} = g\varrho f\frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}}$$

podobně pro

$$l(f, f') = \sqrt{1 + f'^2}$$

máme

$$l_f = 0$$

a

$$l_{f'} = \frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}}.$$

Rovnici

$$w_f - w'_{f'} = \lambda(l_f - l'_{f'})$$

upravíme a vyřešíme takto:

$$\begin{aligned} g\varrho\sqrt{1 + f'^2} - \left(g\varrho f\frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}}\right)' &= -\lambda\left(\frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}}\right)' \\ \sqrt{1 + f'^2} &= \left(\frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}}\left(f - \frac{\lambda}{g\varrho}\right)\right)'. \end{aligned}$$

Zavedeme

$$z(x) = f(x) - \frac{\lambda}{g\varrho}$$

a dostaneme

$$\sqrt{1+z'^2} \;=\; \left(\frac{zz'}{\sqrt{1+z'^2}}\right)'$$

A teprve nyní provedeme derivaci na pravé straně a dostaneme

$$\sqrt{1+z'^2} = \frac{(z'^2+zz'')\sqrt{1+z'^2} - zz'\frac{z'z''}{\sqrt{1+z'^2}}}{1+z'^2}$$

a po úpravě

$$1+z'^2 = zz''.$$

Tuto rovnici vyřešíme

$$\begin{aligned}
\frac{z'}{z} &= \frac{1}{2}\frac{2z'z''}{1+z'^2} \\
(\ln z)' &= (\frac{1}{2}\ln(1+z'^2)' \\
\ln z + \ln k &= \ln\sqrt{1+z'^2} \\
kz &= \sqrt{1+z'^2} \\
z' &= \sqrt{(kz)^2-1} \\
\frac{k\,dz}{\sqrt{(kz)^2-1}} &= k\,dx \\
\operatorname{arccosh} kz &= kx + c_3 \\
z &= \frac{1}{k}\cosh(kx+c_3) \\
y &= \frac{\lambda}{g\varrho} + \frac{1}{k}\cosh(kx+c_3)
\end{aligned}$$

4 Závěr

Ukázali jsme dvojím způsobem, že řetěz pověšený v homogenním gravitačním poli se prohne do tvaru grafu funkce hyperbolický kosinus. Pokud Vás tento text zaujal, v dobrém či špatném, budu rád, když mi to dáte vědět.

Pavel Pokorný
Pavel.Pokorny@vscht.cz
V Praze, 10.května 2014