

Matice A reálných čísel $m \times n$ popisuje lineární zobrazení

$$L : R^n \rightarrow R^m$$

dané předpisem

$$\vec{y} = L(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}.$$

Podívejme se na některé jednoduché příklady matic 2×2 a jaká zobrazení popisují.

Zkuste porovnáním obrázků uhádnout matici, která převádí levý obrázek na pravý.





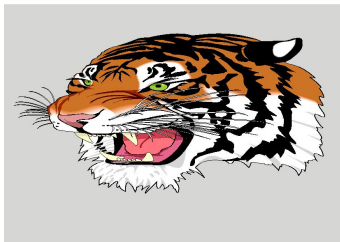
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

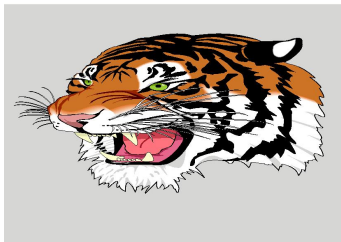
Vlastní čísla a vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$





$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$





$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$





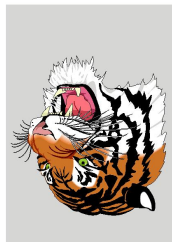
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

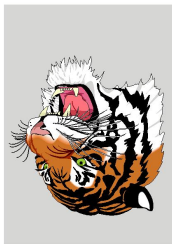
Vlastní čísla a vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$





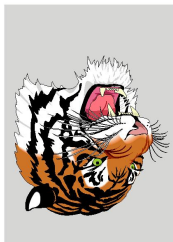
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

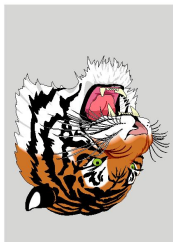
Vlastní čísla a vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$





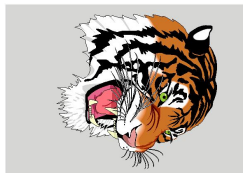
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

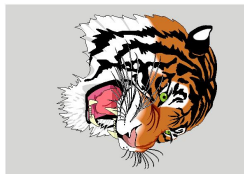
Vlastní čísla a vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$





$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$





$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tato matice nemá dvojici lineárně nezávislých vlastních vektorů.
Vlastní číslo $\lambda = 1$ má algebraickou násobnost 2, ale geometrickou násobnost jen 1.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$





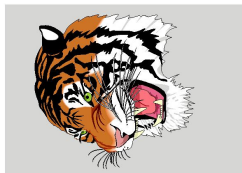
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}$$

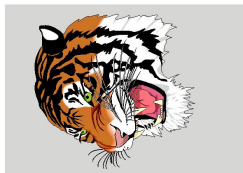
Vlastní čísla a vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tato matice nemá dvojici lineárně nezávislých vlastních vektorů.
Vlastní číslo $\lambda = 1$ má algebraickou násobnost 2, ale geometrickou násobnost jen 1.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$





$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tato matice nemá reálná vlastní čísla.

Protože představuje otočení.

Má imaginární vlastní čísla a imaginární vlastní vektory.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$





$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

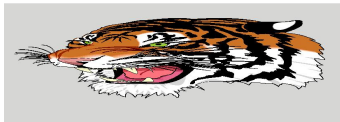
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

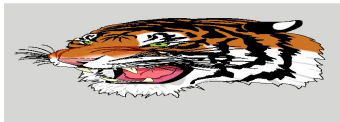
Tato matice nemá reálná vlastní čísla.

Protože představuje otočení.

Má imaginární vlastní čísla a imaginární vlastní vektory.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$





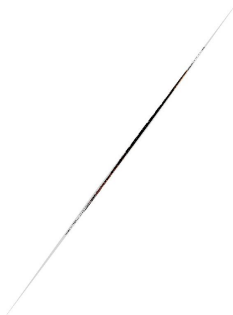
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$$

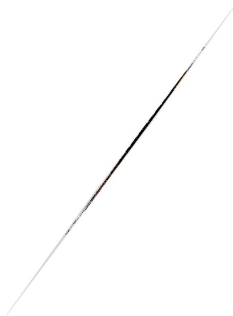
Vlastní čísla a vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1$$





$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5x + 0.6y \\ 0.7x + 0.8y \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.593 \\ 0.805 \end{pmatrix} \doteq 1.315 \begin{pmatrix} 0.593 \\ 0.805 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.759 \\ 0.651 \end{pmatrix} \doteq -0.0152 \begin{pmatrix} -0.759 \\ 0.651 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} = -0.02$$





$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5x - 0.6y \\ 0.7x + 0.8y \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.238 + i \\ 1.11 \end{pmatrix} \doteq (0.65 + 0.63i) \begin{pmatrix} -0.238 + i \\ 1.11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.238 - i \\ 1.11 \end{pmatrix} \doteq (0.65 - 0.63i) \begin{pmatrix} -0.238 - i \\ 1.11 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} = 0.82$$

Pavel Pokorný

`Pavel.Pokorny@vscht.cz`

poslední úpravy 30. 3. 2023