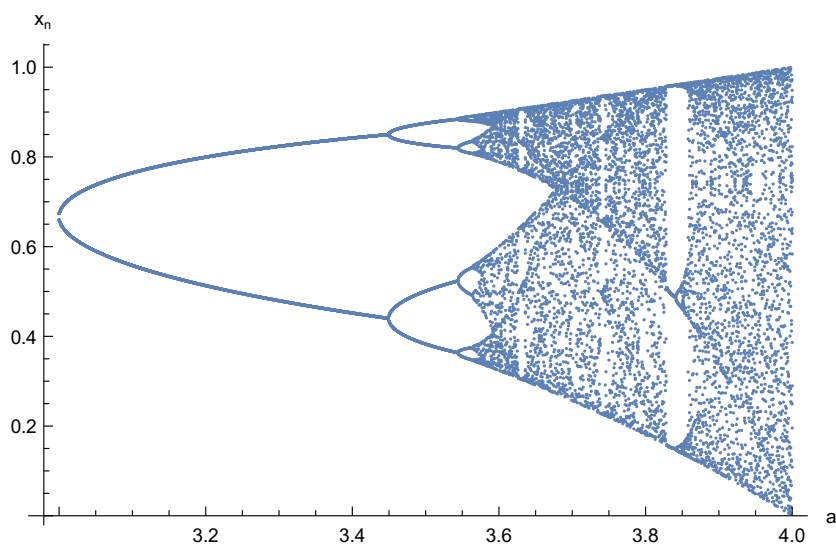


Deterministický chaos
Pavel Pokorný
Ústav matematiky, VŠCHT Praha
Pavel.Pokorny@vscht.cz

1 Úvod

Člověka odpradáвна zajímaly jevy, které nebylo snadné předvídat. Pojd' me se podívat, jaké možnosti nám dává dnešní matematika pro studium zdánlivě tajemných procesů.



Obrázek 1: Závislost hodnot x_n na parametru a ukazuje kaskádu zdvojování periody.

Navážeme na Stručný úvod do teorie dynamických systémů, kde jsme podrobně studovali logistické zobrazení, tedy kvadratickou funkci

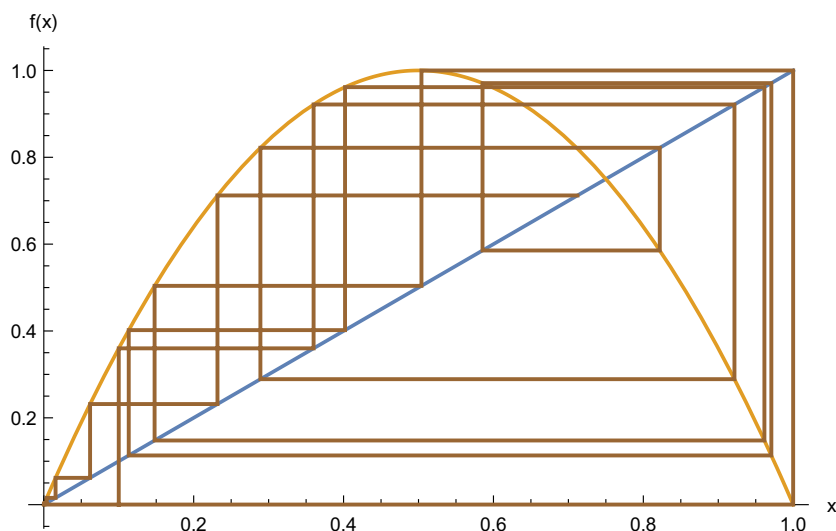
$$f(x) = ax(1 - x)$$

a její iterace, tedy diskretní dynamický systém

$$x_{n+1} = f(x_n). \tag{1}$$

Ukázali jsme si, že pro rostoucí parametr a dochází nejdříve při překročení hodnoty $a = 1$ ke ztrátě stability pevného bodu $x_1^* = 0$ a k získání stability pevného bodu $x_2^* = 1 - \frac{1}{a}$. Pak při překročení hodnoty $a = 3$ dojde k bifurkaci zdvojení periody, kdy pevný bod x_2^* ztratí stabilitu a vytvoří se nové stabilní dvouperiodické řešení. Pak následuje kaskáda zdvojování periody, kdy vznikají periodická řešení s periodou rovnou celočíselným mocninám dvou. To pěkně ilustruje obrázek 1, který si tu připomene.

2 Chaotický režim



Obrázek 2: Graf funkce $f(x) = 4x(1 - x)$ (žlutá parabola) a několik iterací zobrazených jako posloupnost hnědých úseček, pro počáteční podmínku $x_0 = 0.1$

Pojďme se podrobněji podívat, jak se tento dynamický systém chová např. pro hodnotu parametru $a = 4$. Můžeme zvolit počáteční podmínku, např. $x_0 = 0.1$ a spočítat několik iterací funkce f tak, že vyčíslíme $x_1 = f(x_0)$ a výsledek opět dosadíme do funkce f atd. viz obrázek 2. Tak dostaneme posloupnost čísel

0.1, 0.36, 0.9216, 0.289014, 0.821939, 0.585421, 0.970813,

0.113339, 0.401974, 0.961563, 0.147837, 0.503924, 0.999938,
 0.000246305, 0.000984976, 0.00393603, 0.0156821, 0.0617448,
 0.23173, 0.712124, ...

V této posloupnosti na první pohled není vidět žádný řád. Hodnoty se zdánlivě nepravidelně střídají v intervalu $(0; 1)$.

Co kdybychom počáteční podmínku $x_0 = 0.1$ trochu změnili, např. na $x_0 = 0.101$. Protože je funkce f spojitá, tak malá změna argumentu vyvolá malou změnu výsledku. Pak místo

$$f(0.1) = 0.36$$

dostaneme

$$f(0.101) = 0.363196.$$

Tedy odchylka po prvním kroku je

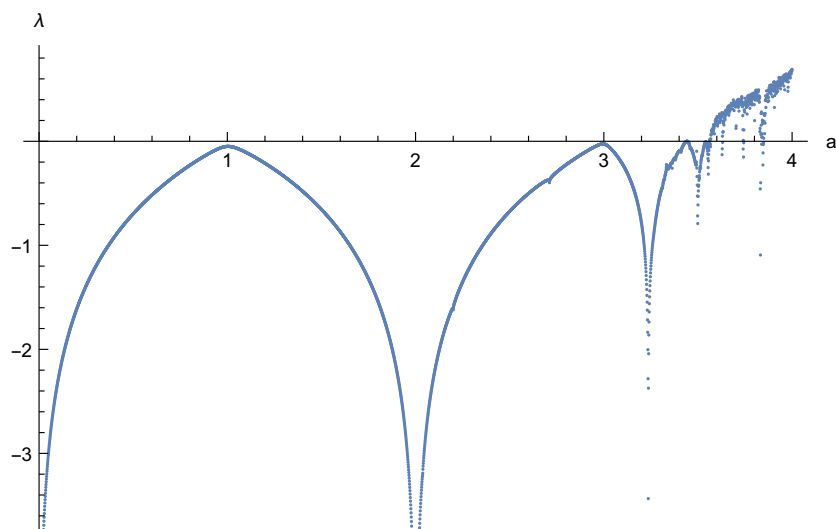
$$d_1 = f(0.101) - f(0.1) = 0.003196.$$

A jak se změní další hodnoty x_n ? Jak se bude odchylka vyvíjet? Ukazuje se, že odchylka roste, zpočátku přibližně exponenciálně, až nabude hodnot srovnatelných s x_n , a pak se bude opět nepravidelně měnit. Pro naše hodnoty počátečních podmínek 0.1 a 0.101 dostaneme odchylky

0.001, 0.003196, 0.00353866, -0.0119853, -0.0208044,
 0.0518508, -0.046187, 0.165431, 0.402255, -0.331785,
 0.784794, -0.252599, -0.247297, 0.744443, 0.759524,
 0.724604, 0.775396, 0.59935, 0.664465, -0.340003, ...

2.1 Citlivá závislost na počátečních podmínkách

Tomuto typu chování dynamického systému, kdy malá změna počáteční podmínky roste v čase až nabude hodnot srovnatelných s hodnotami stavové proměnné, se říká citlivá závislost na počátečních podmínkách a je to průvodní jev typu chování, kterému se říká deterministický chaos. V populární literatuře se tomu říká motýlí efekt, protože je-li počasí na Zemi jako dynamický systém v chaotickém režimu, pak nepatrná změna počátečních podmínek dnes (např. to, když motýl zamává křídly) může znamenat zásadní změnu počasí za půl roku na opačné straně Zeměkoule.



Obrázek 3: Závislost Lyapunovova exponentu λ na parametru a ukazuje pro a blízké 4 kladné hodnoty λ , což je indikátor chování, kterému říkáme deterministický chaos.

Pojďme se podívat, jak lze závislost na počáteční podmínce vyčíslit. Tuto závislost budeme měřit pomocí derivace. Ze vztahu

$$x_1 = f(x_0)$$

plyne

$$\frac{dx_1}{dx_0} = f'(x_0).$$

Použitím pravidla pro derivaci složené funkce ze vztahu

$$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$$

dostaneme

$$\frac{dx_2}{dx_0} = f'(x_1)f'(x_0).$$

Ke stejnému výsledku dospějeme i takto

$$\frac{dx_2}{dx_0} = \frac{dx_2}{dx_1} \frac{dx_1}{dx_0} = f'(x_1)f'(x_0).$$

A pro obecné n

$$\frac{dx_n}{dx_0} = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i).$$

Jestliže chceme popsat, jak se odchylky průměrně změní v jednom kroku, vezmeme z tohoto součinu n -tou odmocninu. A jestliže výsledek v absolutní hodnotě zlogaritmujeme a uvážíme limitu pro $n \rightarrow \infty$, dostaneme důležitou veličinu, která se nazývá Lyapunovův exponent

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} |f'(x_i)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|.$$

Je to tedy průměrná hodnota logaritmu absolutní hodnoty derivace v jednotlivých bodech x_i . Pozorného čtenáře jistě napadne, že Lyapunovův exponent λ závisí na počáteční podmínce x_0 a na hodnotě parametru a . Ano, je to tak, např. pro $x_0 = 0$ ze vztahu

$$f(x) = ax(1 - x)$$

dostaneme

$$x_i = 0$$

a ze vztahu

$$f'(x) = a(1 - 2x)$$

dostaneme

$$f'(x_i) = a,$$

takže

$$\lambda = \ln a.$$

Ale pro většinu ostatních počátečních podmínek je pro výpočet λ nutné pozitivně počítat všechny hodnoty x_i a v nich vyčíslvat derivaci. To lze s výhodou dnes provádět na počítači. To lze pomocí matematického software spočítat tímto příkazem

```
ListPlot[Table[{a, Mean[Log[Abs[a*(1-2#)&/@NestList[a*#*(1-#)&, 0.1, 100]]]}], {a, 0.4, 0.001}]]
```

Program, který se dá napsat na jedinou řádku, se někdy nazývá oneliner. Pro časově náročnější výpočty je také vhodný programovací jazyk C. V něm by tento výpočet mohl vypadat takto

```

# include <stdio.h>
# include <math.h>
int main()
{
    int i,j,ni=1000,nj=1000;
    double x,w,a,a1=0,a2=4,da=(a2-a1)/ni;
    for (i=0;i<ni;i++){
        a = a1 + i*da;
        w = 0;
        x = 0.1;
        for (j=0;j<nj;j++){
            w += log(fabs(a*(1-2*x)));
            x = a*x*(1-x);
        };
        w = w/nj;
        if(!isinf(w) && !isnan(w))printf("%g %g\n",a,w);
    };
    return(0);
} /* main */

```

Výsledná závislost Lyapunovova exponentu na parametru a pro náš studovaný dynamický systém ukazuje obrázek 3. Pro některé hodnoty parametru a blízké číslu 4 je Lyapunovův exponent λ kladný. To znamená citlivou závislost na počátečních podmínkách a pro náš systém to znamená chování, které nazýváme deterministický chaos.

Zájemcům o podrobnější informace o této krásné kapitole moderní matematiky lze doporučit práce [1] a [2].

Literatura

- [1] Pavel Pokorný: Deterministický chaos – plod počítačové fyziky. Československý časopis pro fyziku 58 (2008) č. 6, str. 328-338, dostupný např. zde: <http://old.vscht.cz/mat/Pavel.Pokorny/zluty/>
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory