

Řešení autonomních soustav lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

Pavel Pokorný
Ústav matematiky, VŠCHT Praha
Pavel.Pokorny@vscht.cz

1 Úvod

Diferenciální rovnice patří k tomu nejzajímavějšímu a nejužitečnějšímu, co moderní matematika může nabídnout. Než se zaměříme na soustavy diferenciálních rovnic, pojďme si připomenout, jak se řeší ne soustava, ale jedna diferenciální rovnice.

2 Jedna lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Příklad 1

Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = -2y.$$

Řešení

Nezávisle proměnnou budeme značit t . Čárkou značíme derivaci $y' = \frac{dy}{dt}$. Ukážeme si dva způsoby řešení této diferenciální rovnice: metodu separace proměnných a pomocí charakteristické rovnice.

- Metoda separace proměnných

Uvažme dva případy.

Je-li $y = 0$, je rovnice splněna, tedy funkce $y(t) = 0$ je řešením této rovnice.

Je-li $y \neq 0$, rovnici přepíšeme do tvaru

$$\frac{dy}{dt} = -2y$$

a vydělením y a vynásobením dt separujeme proměnné a dostaneme

$$\frac{dy}{y} = -2dt.$$

Obě strany zintegrujeme

$$\int \frac{dy}{y} = \int -2dt$$

a dostaneme

$$\ln |y| = -2t + c$$

$$|y| = \exp(-2t + c) = \exp(c) \exp(-2t).$$

Exponenciální funkci e^x budeme psát $\exp(x)$. Nyní chceme odstranit absolutní hodnotu. Musíme uvážit tři případy

- Je-li $y > 0$, absolutní hodnotu odstraníme, zůstane pouze y , zavedeme

$$k = \exp(c)$$

a dostaneme

$$y = k \exp(-2t).$$

- Je-li $y < 0$, absolutní hodnotu odstraníme, zůstane $-y$, zavedeme

$$k = -\exp(c)$$

a dostaneme opět

$$y = k \exp(-2t).$$

- Je-li $y = 0$, zavedeme

$$k = 0$$

a dostaneme opět

$$y = k \exp(-2t).$$

Tedy ve všech třech případech dostaneme obecné řešení

$$y(t) = k \exp(-2t).$$

Jaký je význam integrační konstanty k ? Pro $t = 0$ dostaneme $y(0) = k$.
Můžeme tedy psát

$$y(t) = y(0) \exp(-2t).$$

- Použití charakteristické rovnice

Charakteristická rovnice se většinou používá pro diferenciální rovnice vyšších řádů, protože tam nelze použít metodu separace proměnných. Ale lze ji použít i pro rovnici prvního řádu. Pro naši rovnici má charakteristické rovnice přímo tvar

$$\lambda = -2$$

a řešení je pak opět

$$y(t) = y(0) \exp(-2t).$$

Příklad 2

V obecnějším případě můžeme mít rovnici

$$y' = ay.$$

Řešení

Podobným způsobem najdeme obecné řešení

$$y(t) = y(0) \exp(at).$$

Zde funkce $y = 0$ je stacionární řešení. Pro $a > 0$ je nestabilní, pro $a < 0$ je stabilní.

3 Soustava lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

Začneme příkladem soustavy dvou diferenciálních rovnic, kde rovnice nejsou provázané.

Příklad 3

$$\begin{aligned} x' &= 4x \\ y' &= -5y. \end{aligned}$$

Postupem z minulé kapitoly lze najít řešení

$$x(t) = x(0) \exp(4t), \quad y(t) = y(0) \exp(-5t).$$

3.1 Různá vlastní čísla

V případě, že jsou rovnice provázané, tento způsob výpočtu nestačí. Ukážeme si dvě metody řešení, převodem na jednu rovnici druhého řádu a pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů matice.

Příklad 4

$$\begin{aligned}x' &= 3x + 2y \\ y' &= -3x - 4y.\end{aligned}$$

- Převod na jednu rovnici druhého řádu.
Z první rovnice vyjádříme y

$$2y = x' - 3x$$

$$y = \frac{x' - 3x}{2}$$

a dosadíme do druhé rovnice, abychom se zbavili y . (Nebo bychom mohli z druhé rovnice vyjádřit x a dosadit do první rovnice, abychom se zbavili x .) A dostaneme jednu rovnici druhého řádu

$$\frac{x'' - 3x'}{2} = -3x - 4\frac{x' - 3x}{2}$$

$$x'' - 3x' = -6x - 4x' + 12x$$

$$x'' + x' - 6x = 0.$$

Tuto rovnici vyřešíme pomocí charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3.$$

Takže partikulární řešení jsou

$$x_1 = \exp(\lambda_1 t) = \exp(2t), \quad x_2 = \exp(\lambda_2 t) = \exp(-3t)$$

a obecné řešení je

$$x = C_1 \exp(2t) + C_2 \exp(-3t).$$

Pro nalezení funkce y si připravíme derivaci

$$x' = 2C_1 \exp(2t) - 3C_2 \exp(-3t)$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(x' - 3x) = \\ &= \frac{1}{2}(2C_1 \exp(2t) - 3C_2 \exp(-3t) - 3C_1 \exp(2t) - 3C_2 \exp(-3t)) = \\ &= \frac{1}{2}C_1 \exp(2t) - 3C_2 \exp(-3t). \end{aligned}$$

Obrázek 1 ukazuje trajektorie řešení pro různé počáteční podmínky.

- Využití vlastních čísel a vlastních vektorů matice.
Soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 2y \\ y' &= -3x - 4y \end{aligned}$$

zapíšeme ve vektorovém tvaru

$$\vec{z}' = A\vec{z},$$

kde

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

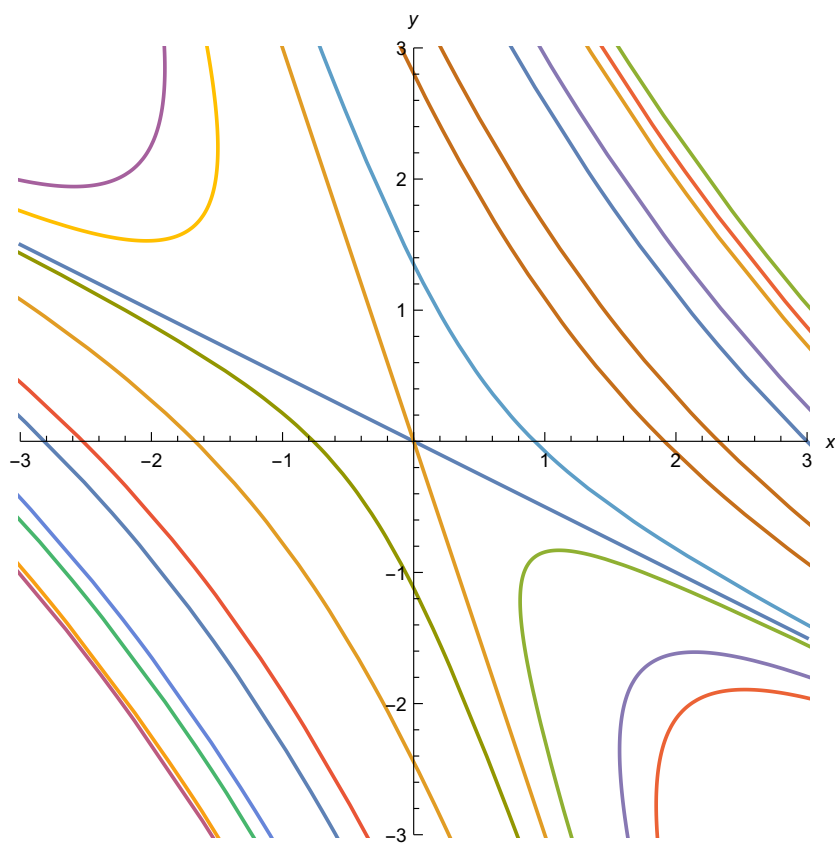
je vektor neznámých funkcí a

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

je matice koeficientů.

Proč jsou vlastní vektory matice užitečné pro řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic? Ukáže se jako užitečné, kdyby existoval reálný nenulový vektor $\vec{v}$, který matice A neotáčí, tedy i po vynásobení maticí A zleva zůstává ve stejném směru, tedy pro který platí

$$A\vec{v} \parallel \vec{v},$$



Obrázek 1: Trajektorie řešení soustavy dvou diferenciálních rovnic pro různé počáteční podmínky připomínají hyperboly.

tedy

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v},$$

kde λ je číslo neboli skalár. Takový vektor $\vec{v}$ se nazývá vlastní vektor matice (anglicky eigenvector) a takové číslo λ se nazývá příslušné vlastní číslo (anglicky eigenvalue). Pak pro počáteční podmínku ležící na přímce určené takovým vektorem $\vec{v}$ bude vektor rychlosti $\vec{z}'$ mířit stejným směrem a bod $\vec{z} = (x(t), y(t))$ neopustí tuto přímku. Pouze se může přibližovat nebo vzdalovat od počátku. Takže můžeme psát

$$\vec{z}(t) = \alpha(t)\vec{v},$$

kde $\alpha(t)$ je skalár úměrný vzdálenosti od počátku a $\vec{v}$ je vektor udávající směr. Pak po dosazení do rovnice

$$\vec{z}' = A\vec{z},$$

dostaneme

$$\alpha'(t)\vec{v} = A\alpha(t)\vec{v} = \alpha(t)A\vec{v} = \alpha(t)\lambda\vec{v}.$$

Takže

$$\alpha'(t) = \lambda\alpha(t).$$

To je ale skalární rovnice, kterou umíme vyřešit a dostaneme

$$\alpha(t) = C \exp(\lambda t)$$

a řešení diferenciální rovnice pak je

$$\vec{z}'(t) = \alpha(t)\vec{v} = C \exp(\lambda t)\vec{v}.$$

Když najdeme dva lineárně nezávislé vlastní vektory $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$, tak obecné řešení je lineární kombinace těchto řešení

$$\vec{z} = C_1 \exp(\lambda_1 t)\vec{v}_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t)\vec{v}_2.$$

Pojďme se tedy podívat, jak najdeme vlastní vektory a vlastní čísla matice.

Vlastním vektorem matice A nazýváme nenulový vektor $\vec{v}$, který splňuje

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Číslo λ pak nazýváme vlastním číslem příslušným k vlastnímu vektoru $\vec{v}$. Postupně upravujeme

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0},$$

kde E je jednotková matice, která má na hlavní diagonále jedničky a všude jinde nuly

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostali jsme rovnici „čtvercová matice krát vektor rovná se nulovému vektoru“. Ta má vždy nulové řešení. Nenulové řešení má právě tehdy, když je matice singulární, tedy když

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Tato rovnice se nazývá charakteristická rovnice. Na levé straně je mnohočlen proměnné λ . Pro matici 2x2 je to kvadratická rovnice. Pokud má dva různé kořeny, označme je λ_1 a λ_2 , pak k nim najdeme příslušné vlastní vektory $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$ a obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic je

$$\vec{z} = C_1 \exp(\lambda_1 t) \vec{v}_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t) \vec{v}_2.$$

Pro naši soustavu dostáváme charakteristickou rovnici

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3 - \lambda)(-4 - \lambda) - 6 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

a vlastní čísla

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3.$$

K těmto dvěma různým vlastním číslům najdeme příslušné vlastní vektory takto. Pro $\lambda_1 = 2$ má rovnice

$$(A - \lambda_1 E) \vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0}$$

nekonečně mnoho řešení. Nám stačí zvolit jedno nenulové řešení. Protože každý nenulový násobek vlastního vektoru je opět vlastní vektor. Pro větší matice bychom tuto soustavu řešili např. Gaussovou eliminací. Pro matici 2x2 stačí uvážit, že hledáme vektor, který je kolmý na řádky matice. Stačí tedy vzít první nebo druhý řádek matice, obě čísla prohodit a jedno z nich vynásobit -1. Tak dostaneme např.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Můžeme ověřit, že toto je opravdu vlastní vektor matice A takto

$$A\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{v}_1.$$

Stejným postupem najdeme pro druhé vlastní číslo $\lambda_2 = -3$ příslušný vlastní vektor

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 E)\vec{v}_2 &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \vec{v}_2 &= \vec{0} \\ \vec{v}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pak obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic je

$$\begin{aligned} \vec{z} &= C_3 \exp(\lambda_1 t) \vec{v}_1 + C_4 \exp(\lambda_2 t) \vec{v}_2 = \\ &= C_3 \exp(2t) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_4 \exp(-3t) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

To je stejný výsledek jako výsledek, který jsme dostali metodou převodu soustavy dvou rovnic prvního řádu na jednu rovnici druhého řádu, jen s tím rozdílem, že je trochu jiná role integračních konstant. Konkrétně

$$C_1 = 2C_3, \quad C_2 = C_4.$$

3.1.1 Diagonalizace

Ukažme si, jak zle matici, která má všechna vlastní čísla různá, rozepsat na užitečný součin třech jiných matic. Např. pro naši matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

s vlastními čísly

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3.$$

a vlastními vektory

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Označme

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

diagonální matici, která má na hlavní diagonále vlastní čísla matice A a označme

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

matici, jejíž sloupce jsou vlastní vektory příslušné vlastním číslům na diagonále matice Λ ve stejném pořadí. Pak tyto dva vztahy

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$$

a

$$A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$$

lze zapsat jedním vztahem

$$AV = V\Lambda.$$

A po vynásobení zprava inverzní maticí V dostaneme užitečný rozklad matice A

$$A = V\Lambda V^{-1}.$$

Např. pro naši matici dostaneme

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{5}\right) \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jak tento rozklad souvisí se soustavou diferenciálních rovnic

$$\vec{z}' = A\vec{z}?$$

Použijeme $A = V\Lambda V^{-1}$

$$\vec{z}' = V\Lambda V^{-1}\vec{z},$$

zleva vynásobíme maticí V^{-1} a dostaneme

$$V^{-1}\vec{z}' = \Lambda V^{-1}\vec{z}.$$

Nyní se nabízí substituce

$$\vec{u} = V^{-1}\vec{z},$$

která převede soustavu na tvar

$$\vec{u}' = \Lambda\vec{u}.$$

Pesimista může namítnout, že jsme si nepomohli. Měli jsme rovnici ve tvaru „derivace vektoru rovná se matice krát vektor“ a máme rovnici ve stejném tvaru. Ale důležité je, že matice Λ je diagonální, tedy má nenulové prvky pouze na hlavní diagonále a jinde nuly. Takže tato soustava diferenciálních rovnic se rozpadá na nezávislé rovnice, podobně jako soustava v příkladu 3.

3.1.2 Exponenciála matice

Pro libovolné reálné nebo komplexní číslo x platí

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Všechny operace na pravé straně lze provést i pro čtvercovou matici, tedy násobení mezi sebou, násobení reálným číslem $\frac{1}{n!}$ a sčítání. Takže je možné uvažovat exponenciálu matice, kde roli jedničky hraje jednotková matice.

Na co je to dobré? Řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\vec{z}' = A\vec{z}$$

lze zapsat ve tvaru

$$\vec{z}(t) = \exp(tA)\vec{z}(0).$$

To lze ověřit tak, že provedeme zkoušku

$$L = \vec{z}' = (\exp(tA)\vec{z}(0))' = A(\exp(tA)\vec{z}(0)) = A\vec{z} = P.$$

3.2 Násobná vlastní čísla

Tuto komplikaci si podrobně ukážeme pro matice 2x2.

3.2.1 Diagonalizovatelná matice

Příklad 5

$$\begin{aligned} x' &= 2x \\ y' &= 2y. \end{aligned}$$

Snadno najdeme řešení

$$x(t) = x(0) \exp(2t), \quad y(t) = y(0) \exp(2t).$$

Pojďme se podívat, jak to dopadne, když budeme řešení hledat pomocí vlastních vektorů a vlastních čísel matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice je

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2 - \lambda)^2 = 0$$

a ta má dvojnásobný kořen

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 2.$$

Vlastní vektor hledáme jako nenulové řešení rovnice

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}.$$

V tomto případě je matice

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nulová. Má hodnotu 0. Proto existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory, např. vektory

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení pak je

$$\begin{aligned} \vec{z} &= C_1 \exp(\lambda_1 t) \vec{v}_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t) \vec{v}_2 = \\ &= C_1 \exp(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \exp(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

tedy

$$x(t) = C_1 \exp(2t), \quad y(t) = C_2 \exp(2t)$$

v souladu s řešením získaným předchozí metodou.

Podívejme se podrobněji, pro kterou matici 2×2 s dvojnásobným vlastním číslem $\lambda_1 = \lambda_2$ bude mít matice

$$A - \lambda_1 E$$

hodnost 0, tedy bude nulová.

Označme si pro přehlednost prvky matice A jako a, b, c, d , tedy

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

A hledáme podmínky na tato 4 čísla a, b, c, d , aby matice A měla dvojnásobné vlastní číslo a aby matice $A - \lambda_1 E$ byla nulová. Z podmínky

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

plyne

$$b = 0, \quad c = 0.$$

Pak

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = d$$

a z podmínky

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

plyne

$$a = d.$$

Takže matice A musí být ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aE,$$

tedy musí to být násobek jednotkové matice. A obrácená implikace je zřejmá, tedy je-li matice A násobkem jednotkové matice, pak má shodná vlastní čísla a matice $A - \lambda E$ je nulová. Dostáváme tedy ekvivalenci. Matice má shodná vlastní čísla a matice $A - \lambda E$ je nulová právě tehdy, když matice A je násobkem jednotkové matice. A v tom případě existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory.

Zavádíme pojem algebraická násobnost vlastního čísla, což je násobnost vlastního čísla jako kořene charakteristické rovnice. A pojem geometrická násobnost vlastního čísla jako počet příslušných lineárně nezávislých vlastních vektorů. Zde je algebraická i geometrická násobnost vlastního čísla 2. Ukažme si případ, kdy je geometrická násobnost menší než algebraická násobnost.

3.2.2 Nediagonalizovatelná matice

Situace, kdy matice s násobnými vlastními čísly je násobkem jednotkové matice je zvláštní případ. V typickém případě nebude mít matice $A - \lambda E$ hodnotu 0, ale 1. Nebudou tedy existovat dva lineárně nezávislé vlastní vektory. Osobně považuji tuto skutečnost za snad jediné ošklivé místo matematiky. Pojd'me se podívat, jak to vyřešit. Budeme muset zavést zobecněný vlastní vektor. Ukažme si to na dvou příkladech.

Příklad 6

$$\begin{aligned}x' &= 2x + y \\ y' &= 2y.\end{aligned}$$

Vyřešme tuto soustavu nejdříve bez použití vlastních vektorů. Pro druhou rovnici lze napsat řešení

$$y(t) = y(0) \exp(2t).$$

To dosadíme do první rovnice a dostaneme

$$x' = 2x + y(0) \exp(2t).$$

Homogenní rovnice

$$x' = 2x$$

má řešení $x = k \exp(2t)$. Nehomogenní rovnici lze vyřešit metodou odhadu nebo metodou variace konstanty. Při použití metody odhadu hledáme řešení ve tvaru

$$x = at \exp(2t).$$

Hodnotu konstanty a najdeme dosazením tohoto tvaru do rovnice. Připravíme si derivaci

$$x' = a \exp(2t) + 2ta \exp(2t)$$

a dostaneme

$$a \exp(2t) + 2ta \exp(2t) = 2at \exp(2t) + y(0) \exp(2t)$$

a odtud

$$a = y(0).$$

Takže řešení je

$$\begin{aligned}x &= y(0)t \exp(2t) + k \exp(2t) \\ y &= y(0) \exp(2t),\end{aligned}$$

kde integrační konstanta k má význam počáteční podmínky $x(0)$, takže můžeme psát

$$\begin{aligned}x &= y(0)t \exp(2t) + x(0) \exp(2t) \\ y &= y(0) \exp(2t)\end{aligned}$$

nebo ve vektorovém tvaru

$$\vec{z} = x(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(2t) + y(0) \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \exp(2t).$$

První člen je (až na násobivou konstantu $x(0)$) roven

$$\vec{v} \exp(\lambda t),$$

kde $\vec{v}$ je (jak ukážeme dále) vlastní vektor matice A . O tomto členu víme, že je řešením. Ale co ten druhý člen? Ten je (opět až na násobivou konstantu $y(0)$) ve tvaru

$$(t\vec{v} + \vec{w}) \exp(\lambda t).$$

Škoda. Když existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory matice A , tak tento druhý člen je prostě $\vec{v}_2 \exp(\lambda_2 t)$. Ale když dva lineárně nezávislé vlastní vektory neexistují, tak máme tento tvar řešení. Jaké jsou podmínky na vektor $\vec{w}$? Dosazením výrazu

$$\vec{z} = (t\vec{v} + \vec{w}) \exp(\lambda t),$$

kde

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

do rovnice

$$\vec{z}' = A\vec{z}$$

dostaneme po úpravách podmínku na vektor $\vec{w}$

$$((t\vec{v} + \vec{w}) \exp(\lambda t))' = A(t\vec{v} + \vec{w}) \exp(\lambda t)$$

$$\vec{v} + \lambda t \vec{v} + \lambda \vec{w} = t \lambda \vec{v} + A \vec{w}$$

$$A \vec{w} = \lambda \vec{w} + \vec{v}$$

$$A \vec{w} - \lambda \vec{w} = \vec{v}$$

$$(A - \lambda E) \vec{w} = \vec{v}.$$

Takový vektor $\vec{w}$ se nazývá zobecněný vlastní vektor. Právě jsme dokázali, že pokud takový vektor $\vec{w}$ najdeme, tak výraz $\vec{z} = (t\vec{v} + \vec{w}) \exp(\lambda t)$ je řešením naší soustavy diferenciálních rovnic. A protože se nejedná o násobek řešení $\vec{v} \exp(\lambda t)$, tak jsou to dvě lineárně nezávislá řešení. A jejich obecná lineární kombinace je obecné řešení.

Zbývá otázka, jestli má rovnice

$$(A - \lambda E) \vec{w} = \vec{v}$$

řešení. Ukážeme to pro matici 2x2. Je-li matice A matice 2x2, tak matice $A - \lambda E$ je také 2x2. Může mít hodnotu 0, 1 nebo 2. Hodnota 2 nemůže nastat, protože jsme vlastní číslo λ našli právě z podmínky $\det(A - \lambda E) = 0$. Hodnota 0 znamená, že matice $A - \lambda E$ je nulová, tedy matice A je násobkem jednotkové matice, to jsme diskutovali v oddíle diagonalizovatelná matice. Zde uvažujeme případ, kdy hodnota matice $A - \lambda E$ je 1.

Označme si opět pro přehlednost prvky matice A jako a, b, c, d , tedy

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Pak

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

a její diskriminant musí být nulový

$$D = (a - d)^2 + 4bc = 0,$$

aby měla dvojnásobný kořen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a + d}{2},$$

tedy

$$2\lambda = a + d.$$

Můžeme volit vlastní vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}.$$

Pak rovnice pro $\vec{w}$ zní

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \vec{w} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}.$$

Matice na levé straně je singulární, její sloupce jsou lineárně závislé. Aby tato rovnice měla řešení, musí být a stačí, aby vektor na pravé straně byl násobkem druhého sloupce matice. Ale protože se rovnají první složky, musejí se rovnat i druhé složky

$$d - \lambda = \lambda - a,$$

což platí, protože je to ekvivalentní se vztahem $2\lambda = a + d$. Tím jsme dokázali, že zobecněný vektor $\vec{w}$ existuje.

Je jednoznačný? Není. Když k zobecněnému vlastnímu vektoru $\vec{w}$ přičteme libovolný násobek vlastního vektoru $\vec{v}$, tak dostaneme opět zobecněný vlastní vektor splňující podmínku

$$(A - \lambda E)\vec{w} = \vec{v},$$

protože jsme přičetli vektor, který je v jádře matice $A - \lambda E$, tedy vektor, který tato matice zobrazí na nulový vektor.

Ukažme si to na ještě jednom příkladě.

Příklad 7

$$\begin{aligned} x' &= 5x + 2y \\ y' &= -2x + y. \end{aligned}$$

Vyřešíme tuto soustavu opět dvojím způsobem. Převodem na jednu rovnici druhého řádu a pak pomocí vlastních vektorů a zobecněných vlastních vektorů.

- Převod na jednu rovnici druhého řádu. Budeme postupovat podobně jako při řešení příkladu 4.

$$2y = x' - 5x$$

$$\begin{aligned}
y &= \frac{x' - 5x}{2} \\
\frac{x'' - 5x'}{2} &= -2x + \frac{x' - 5x}{2} \\
x'' - 5x' &= -4x + x' - 5x \\
x'' - 6x' + 9x &= 0 \\
\lambda^2 - 6\lambda + 9 &= 0 \\
\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 &= 3 \\
x &= C_1 \exp(3t) + C_2 t \exp(3t) \\
x' &= 3C_1 \exp(3t) + C_2 \exp(3t) + 3C_2 t \exp(3t) \\
y &= \left(-C_1 + \frac{C_2}{2} - C_2 t \right) \exp(3t).
\end{aligned}$$

- A nyní vyřešíme stejnou soustavu pomocí vlastních vektorů a zobecněných vlastních vektorů. Matice je

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice je

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Ta má dvojnásobný kořen

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 3.$$

Najdeme příslušný vlastní vektor $\vec{v}$ z rovnice

$$\begin{aligned}
(A - \lambda E)\vec{v} &= \vec{0} \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \vec{v} &= \vec{0}
\end{aligned}$$

např.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Druhý vlastní vektor, který by byl s tímto vlastním vektorem lineárně nezávislý, neexistuje. Hledáme tedy zobecněný vlastní vektor $\vec{w}$ z rovnice

$$\begin{aligned}(A - \lambda E)\vec{w} &= \vec{v} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \vec{w} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{w} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nyní můžeme napsat dvě řešení

$$\vec{z}_1 = \vec{v} \exp(\lambda_1 t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \exp(3t)$$

a

$$\vec{z}_2 = (t\vec{v} + \vec{w}) \exp(\lambda_1 t) = \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \exp(3t)$$

a obecné řešení pak je

$$\vec{z} = C_3 \vec{z}_1 + C_4 \vec{z}_2$$

a jednotlivé funkce řešení jsou

$$\begin{aligned}x &= \left(C_3 + C_4 \left(t + \frac{1}{4} \right) \right) \exp(3t) \\ y &= \left(-C_3 + C_4 \left(-t + \frac{1}{4} \right) \right) \exp(3t).\end{aligned}$$

To je stejný výsledek jako ten získaný předešlou metodou, s tím, že integrační konstanty jsou svázány vztahy

$$C_1 = C_3 + \frac{1}{4}C_4, \quad C_2 = C_4.$$

3.2.3 Jordanizace

A co diagonalizace nediagonalizovatelné matice? Pro matici s různými vlastními čísly jsme si ukázali, že je možné ji rozložit na součin

$$A = V \Lambda V^{-1},$$

kde sloupce matice V jsou vlastní vektory matice A a diagonální matice Λ je tvořena vlastními čísly matice A .

Ale co když neexistuje druhý lineárně nezávislý vlastní vektor? I v tom případě můžeme sestavit matici V tak, že její první sloupec bude vlastní vektor $\vec{v}$ a její druhý sloupec bude zobecněný vlastní vektor $\vec{w}$ matice A . A vztahy

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

a

$$A\vec{w} = \lambda\vec{w} + \vec{v}$$

můžeme zapsat obdobou vztahu $AV = V\Lambda$, totiž jedním vztahem

$$AV = VJ,$$

kde matice J není bohužel diagonální, ale je to tzv. Jordanova matice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Proto jsme tento rozklad matice nazvali Jordanizace. Když tento vztah vynásobíme zprava maticí V^{-1} , tak dostaneme

$$A = VJV^{-1}.$$

Pro naši matici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

jsme našli dvojnásobné vlastní číslo

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 3,$$

příslušný vlastní vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a zobecněný vlastní vektor

$$\vec{w} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Takže

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a Jordanův rozklad je

$$A = VJV^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4 Vztah mezi vlastními čísly a stopou a determinantem

Na závěr ještě uvedeme vztah mezi vlastními čísly λ_1 a λ_2 matice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a determinantom matice $\det A = ad - bc$ a stopou matice $\text{Tr } A = a + d$. Charakteristická rovnice je

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0.$$

Když ji porovnáme se zápisem kvadratické rovnice s kořeny λ_1 a λ_2

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$$

$$\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0,$$

tak porovnání koeficientů u λ dá

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d = \text{Tr } A$$

a porovnání absolutního členu (bez λ) dá

$$\lambda_1\lambda_2 = ad - bc = \det A.$$

Takto jsme to ukázali pro matici 2x2, ale tyto vztahy platí pro všechny čtvercové matice $n \times n$, pro které je stopa definována jako součet prvků na hlavní diagonále

$$\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$