

Stručný úvod do teorie dynamických systémů

Pavel Pokorný

Ústav matematiky, VŠCHT Praha

Pavel.Pokorny@vscht.cz

1 Úvod

Některé chemické, mechanické, elektrické, biologické a jiné systémy, které se vyvíjejí v čase, lze poměrně dobře popsat matematickými vztahy. Používáme k tomu zejména diferenciální a diferenční rovnice. Ve škole se pilně procvičují diferenciální, my se zde budeme věnovat těm diferenčním.

2 Diferenční rovnice

Příkladem diferenční rovnice je rekurentně zadaná posloupnost, např.

$$x_{n+1} = 2x_n.$$

Pro kladnou počáteční podmínku, např.

$$x_0 = 1$$

snadno spočteme prvních pár členů této posloupnosti

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 8, \quad x_4 = 16.$$

Obecně

$$x_n = x_0 2^n.$$

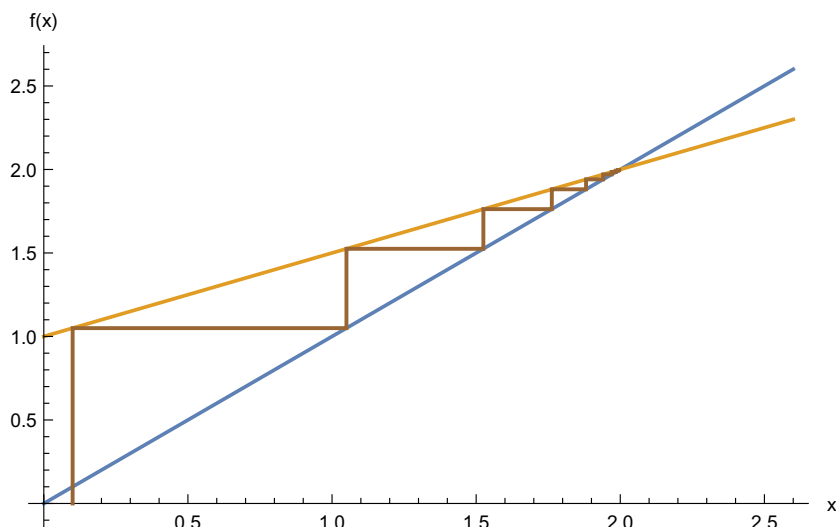
Dostáváme geometrickou posloupnost, která exponenciálně roste pro libovolnou kladnou počáteční podmínku. Pro $x_0 = 0$ máme konstantní řešení $x_n = 0$. A pro zápornou počáteční podmínku $x_0 < 0$ posloupnost exponenciálně klesá do minus nekonečna.

Místo dvojky může být v rovnici obecný koeficient, např. q . Pak vztah

$$x_{n+1} = qx_n$$

určuje posloupnost

$$x_n = x_0 q^n.$$



Obrázek 1: Graf funkce f (žlutá křivka) spolu s grafem identity $y = x$ (modrá křivka) dovolují načrtnout několik svislých a vodorovných úseček (hnědá křivka), které ukazují postupné iterace funkce f .

Pro $q > 1$ a $x_0 > 0$ bude posloupnost x_n opět exponenciálně růst. Pro $q = 1$ bude konstantní. A pro $0 < q < 1$ bude exponenciálně klesat k nule. To je případ biologické populace, když hladoví a vymírá. Nebo osud našich úspor, jejichž hodnotu snižuje inflace. Takto se také snižuje množství látky, která se rozpadá radioaktivní reakcí nebo chemickou reakcí prvního řádu.

Pro záporné koeficienty se budou střídát znaménka čísel x_n . Pro $-1 < q < 0$ se budou x_n blížit k nule. Pro $q < -1$ budou v absolutní hodnotě růst do nekonečna.

Jaké jevy tento dynamický systém popisuje? Index n zde hraje roli diskrétního času. Slovem diskrétní zde nemyslíme něco nemorálního, o čem bychom raději neměli hovořit, ale to, že čas uvažujeme v izolovaných časových okamžicích s pevným časovým krokem. Tak např. růst počtu bakterií nebo jiných biologických jedinců, pokud mají dostatek potravy a příhodné životní podmínky, se v čase zvětšuje právě tímto způsobem, když jej měříme v ekvidistantních časových okamžicích. To je možné, ale pouze po určité omezené období, dokud jedinci nespotřebují potravu.

Podobně se bude vyvíjet náš dluh, pokud si půjčíme částku x_0 korun s pevným úrokem, např. 4 % p.a. Pak bude koeficient $q = 1.04$.

Obecněji můžeme psát

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1)$$

kde f je reálná funkce jedné reálné proměnné. Rovnice (1) představuje jednoduchý, ale velice zajímavý a užitečný dynamický systém. Někdy hovoříme o dynamickém systému s diskrétním časem, někdy trochu nepřesněji stručně o diskrétním dynamickém systému. Tomuto výpočtu, kde výsledek funkce dosazujeme opakovaně zpět jako argument funkce, se říká iterace. Jde vlastně o skládání funkce sama se sebou.

Vztah (1) nám dovoluje spočítat nový stav x_{n+1} ze znalosti předcházejícího stavu x_n . Někdy se podaří najít formulku pro přímý výpočet x_n na základě znalosti n a x_0 , ale to jen ve výjimečně jednoduchých případech, jako byl ten předcházející.

Existuje užitečná grafická metoda, která nám dovolí na základě grafu funkce f nalézt řadu důležitých vlastností chování takto rekurentně zadané posloupnosti, viz obrázek 1. Např. pro funkci $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$ a počáteční hodnotu $x_0 = 0.1$ snadno spočítáme první několik hodnot posloupnosti x_n

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.1, \\ x_1 &= 1.05, \\ x_2 &= 1.525, \\ x_3 &= 1.7625, \\ x_4 &= 1.88125, \\ x_5 &= 1.94063, \\ x_6 &= 1.97031, \\ x_7 &= 1.98516, \\ x_8 &= 1.99258, \\ x_9 &= 1.99629. \end{aligned}$$

Lze vypořádat, že hodnoty x_n rostou, a to čím dál tím pomaleji a blíží se hodnotě přibližně 2. Výpočet první hodnoty x_1 z počáteční podmínky x_0 lze provést graficky tak, že hodnotu $x_0 = 0.1$ vyneseme na ose x a k ní najdeme příslušnou funkční hodnotu tak, že vedeme svislou úsečku z bodu $(x_0, 0)$ do bodu (x_0, x_1) na grafu funkce f . Pak chceme dosadit funkční hodnotu zpět do funkce samotné jako její argument, tedy v roli x . To graficky provedeme tak, že z bodu (x_0, x_1) vedeme vodorovnou úsečku na úhlopříčku do bodu (x_1, x_1) . Dále se tyto dva kroky opakují. Tím vznikne cik-cak čára ze svislých a vodorovných úseček. Na obrázku je nakreslena hnědou barvou.

Tento obrázek nám pomůže vyslovit několik užitečných závěrů o dynamickém systému (1). Průsečíky grafu funkce s přímkou $y = x$ jsou pevné body, splňují podmínku

$$f(x^*) = x^* \quad (2)$$

a mají tu důležitou vlastnost, že pro počáteční podmínku $x_0 = x^*$ platí $x_n = x^*$ pro všechna n .

Důležitá je otázka stability takového pevného bodu. Pro dynamický systém

$$x_{n+1} = qx_n$$

jsme viděli, že pro $-1 < q < 1$ se hodnoty x_n blíží k nule. Nula je zde stabilní pevný bod. Pro $|q| > 1$ se hodnoty x_n od nuly vzdalují, nula je zde nestabilní pevný bod.

V obecném případě roli nuly přebírá pevný bod x^* daný podmínkou (2) a roli koeficientu q přebírá derivace v tomto pevném bodě $f'(x^*)$.

Pokud funkce f obsahuje parametr, pak při změně parametru může dojít ke změně hodnoty derivace v pevném bodě. Pokud dojde také ke změně stability pevného bodu, dochází ke kvalitativní změně chování dynamického systému, které se říká bifurkace. Ukažme si to na logistickém zobrazení, kdy budeme iterovat kvadratickou funkci.

2.1 Logistické zobrazení

Uvažujme iteraci funkce

$$f(x) = ax(1 - x)$$

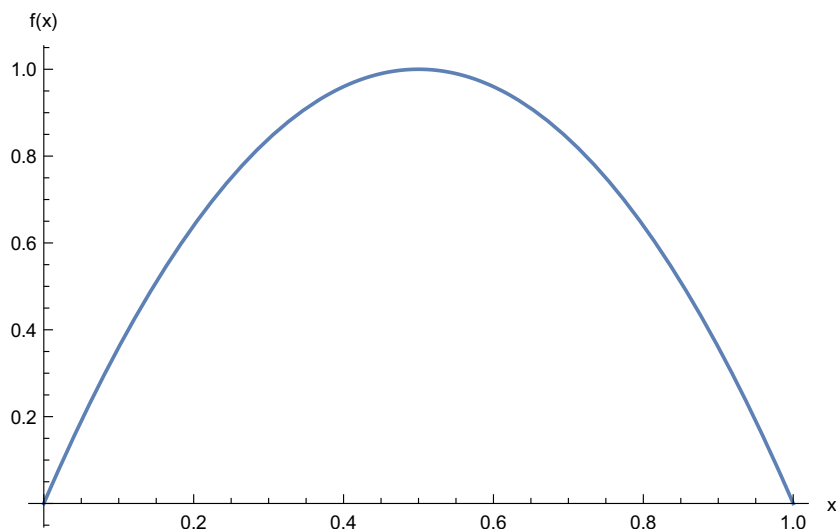
s parametrem $0 \leq a \leq 4$. To je přirozené zobecnění výše uvedeného systému. Roli koeficientu q zde hraje výraz $a(1 - x)$. Pokud se vrátíme k naší biologické interpretaci, tak pro malé populace, tedy pro x blízké nule, se bude systém pro $a > 1$ množit. Se vzrůstajícím počtem jedinců se po určité době objeví nedostatek potravy. To přibližně vyjadřuje závorka $(1 - x)$. Jedinci se přestanou tak rychle množit a může dokonce dojít k úhynu.

Pokud chceme považovat x za počet nebo koncentraci biologických jedinců, pak budeme uvažovat pouze nezáporné hodnoty x a $f(x)$. To bude splněno pro

$$0 \leq x \leq 1$$

a

$$0 \leq a \leq 4.$$



Obrázek 2: Graf funkce $f(x) = ax(1 - x)$ nazývané logistické zobrazení, pro hodnotu parametru $a = 4$.

Proto budeme tento dynamický systém uvažovat pouze pro tyto hodnoty proměnné x a parametru a .

Jedná se o kvadratickou funkci, grafem je parabola procházející body $(0, 0)$ a $(1, 0)$ s maximem pro $x = \frac{1}{2}$, viz obrázek 2.

Jak budou vypadat pevné body dynamického systému

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)?$$

Najdeme je řešením rovnice

$$ax(1 - x) = x.$$

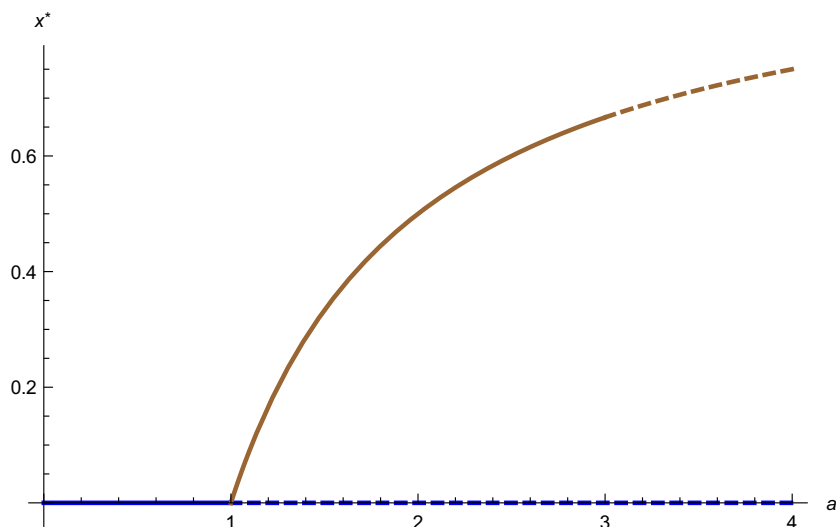
To je kvadratická rovnice, která má dva reálné kořeny

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 1 - \frac{1}{a}.$$

Obrázek 3 ukazuje závislost těchto pevných bodů na parametru a .

2.1.1 Stabilita pevných bodů

Vyšetřeme stabilitu těchto dvou pevných bodů. Pevný bod x^* je stabilní, pokud $|f'(x^*)| < 1$, a nestabilní pokud $|f'(x^*)| > 1$. Spočtěme tedy derivaci



Obrázek 3: Závislost pevných bodů x^* na parametru a pro logistické zobrazení. Plná čára znamená stabilní pevný bod, čárkovaná čára znamená nestabilní pevný bod, jak bude vysvětleno dále.

funkce $f(x) = ax(1 - x)$ v pevných bodech $x_1^* = 0$, a $x_2^* = 1 - \frac{1}{a}$.

$$f'(x) = a - 2ax$$

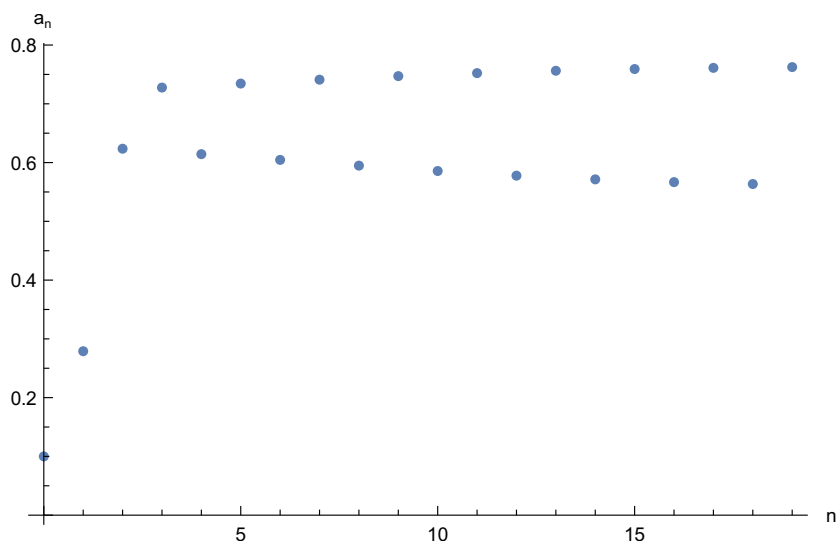
$$f'(x_1^*) = a$$

$$f'(x_2^*) = a - 2a\left(1 - \frac{1}{a}\right) = 2 - a.$$

Pevný bod $x_1^* = 0$ bude stabilní pro $a < 1$ a nestabilní pro $a > 1$ (uvažujeme stále pouze hodnoty parametru $0 \leq a \leq 4$). Pro rostoucí parametr a při přechodu přes kritickou hodnotu $a = 1$ pevný bod $x_1^* = 0$ ztratí stabilitu. To je srozumitelný jev. Pro malé a je slabé množení biologických jedinců a ti to vymírají. Pro velké a je množení silné a počet jedinců zpočátku roste, přibližně exponenciálně. Pro tuto hodnotu parametru $a = 1$ také dochází k průsečíku grafů závislosti pevných bodů na parametru a , viz obrázek 3.

Pevný bod x_2^* bude stabilní pokud $|2 - a| < 1$. Pro rostoucí a tento pevný bod získá stabilitu pro $a = 1$ (přesně, když první pevný bod stabilitu ztrácí, tedy můžeme říci, že si tyto dva pevné body pro $a = 1$ vymění stabilitu). A stabilitu ztratí pro $a = 3$. Na obrázku 3 plná čára značí stabilitu, čárkovaná čára nestabilní chování.

2.1.2 Bifurkace zdvojení periody

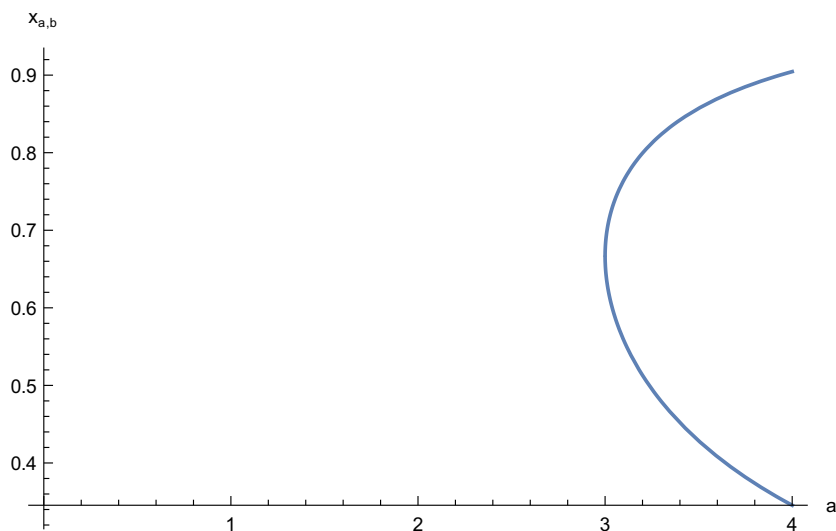


Obrázek 4: Pro hodnotu parametru $a = 3.1$ se pro počáteční podmínku $x_0 = 0.1$ hodnoty x_n neblíží jednomu číslu, ale střídavě dvěma číslům, přibližně 0.56 a 0.76.

A co se stane, když parametr a překročí hodnotu $a = 3$? Provedme si malý numerický experiment. Pro hodnotu parametru např. $a = 3.1$ a počáteční podmínku např. $x_0 = 0.1$ si spočítáme několik hodnot x_n . To lze provést např. pomocí matematického software *Mathematica* pomocí těchto příkazů

```
In[1]:= f[x_] := 3.1*x*(1 - x);  
In[2]:= NestList[f, 0.1, 19]  
Out[2]= {0.1, 0.279, 0.623593, 0.727647, 0.614348,  
0.734466, 0.60458, 0.741095, 0.594806, 0.747136,  
0.585663, 0.752252, 0.577744, 0.756263, 0.571421,  
0.759187, 0.566748, 0.761189, 0.56352, 0.762492}
```

Vidíme, že hodnoty x_n se po počátečním přechodném období postupně blíží střídavě ke dvěma různým číslům, přibližně 0.56 a 0.76. To ukazuje obrázek 4.



Obrázek 5: Závislost dvouperiodických bodů x_a a x_b na parametru a .

Jak můžeme nalézt tato dvě čísla (označme si je x_a a x_b), ke kterým se hodnoty x_n střídavě blíží? Mělo by pro ně platit

$$f(x_a) = x_b \quad f(x_b) = x_a,$$

tedy měla by to být řešení rovnice

$$f(f(x)) = x.$$

To je pevný bod druhé iterace funkce f , neboli-li dvouperiodický bod funkce f . To pro

$$f(x) = ax(1 - x)$$

vede na rovnici

$$a(ax(1 - x))(1 - (ax(1 - x))) = x$$

a po odečtení pravé strany

$$a(ax(1 - x))(1 - (ax(1 - x))) - x = 0.$$

Na levé straně je mnohočlen 4. stupně. Ten má 4 kořeny. Dva kořeny už známe, jsou to pevné body funkce f , tedy body $x_1^* = 0$ a $x_2^* = 1 - \frac{1}{a}$.

Když vydělíme tento mnohočlen 4. stupně mnohočlenem $a(x - x_1^*)(x - x_2^*)$, dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici

$$a^2x^2 - a(a+1)x + a+1 = 0.$$

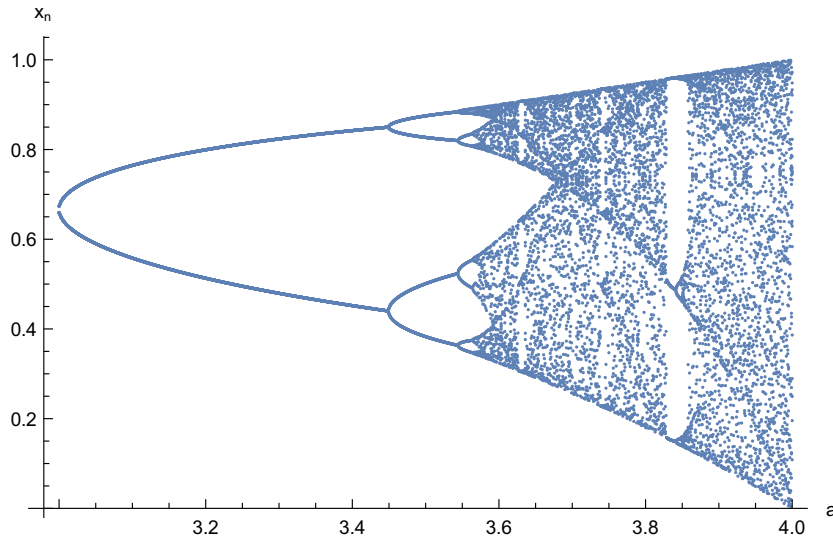
Ta má pro $a \geq 3$ dva reálné kořeny

$$x_{a,b} = \frac{a + a^2 \pm \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a^2},$$

které v závislosti na parametru a ukazuje obrázek 5. Pro kontrolu si můžeme spočítat tyto dvouperiodické body pro hodnotu parametru $a = 3.1$ a dostaneme $x_a = 0.558014$ a $x_b = 0.764567$, což je ve shodě s naším předchozím odhadem (0.56 a 0.76).

Této kvalitativní změně chování se říká bifurkace zdvojení periody, anglicky period doubling bifurcation.

2.1.3 Kaskáda zdvojování periody



Obrázek 6: Závislost hodnot x_n na parametru a ukazuje kaskádu zdvojování periody.

Při rostoucím parametru a toto dvou periodické řešení opět ztratí stabilitu a vznikne další bifurkací zdvojení periody nové řešení, tentokrát již

s periodou 4. A tento proces se opakuje a vznikají tak řešení s periodou rovnou celočíselným mocninám dvou. Intervaly mezi bifurkacemi se zkracují. Dobrou představu lze získat, když si nakreslíme obrázek, kde pro různé hodnoty parametru a zvolíme určitou počáteční podmínku x_0 , provedeme několik iterací

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

bez vykreslování a pak spočítáme několik iterací, při kterých budeme vynášet body (a, x_n) . Výsledek ukazuje obrázek 6.

Výše popsané jevy ukázané na jednoduchém dynamickém systému, iterace kvadratické funkce, jsou časté i pro složitější dynamické systémy, jak v podobě matematických modelů, tak u reálných systémů přírodních i technických.