Deterministický chaos – plod počítačové fyziky

Pavel Pokorný
Ústav matematiky, VŠCHT Praha, Technická 5, 166 28 Praha 6

Vysvětlíme tři hlavní významy slova chaos: v běžné řeči, v řecké mytologii a v teorii dynamických systémů. Dále se soustředíme na deterministický chaos jako typ chování nelineárních dynamických systémů. Uvedeme definice a vysvětlíme základní pojmy a budeme diskutovat vlastnosti a důsledky chaotických řešení. Uvedeme kvantitativní kritérium pro odlišení náhodných a deterministických systémů. Na závěr zmíníme souvislosti mezi deterministickým chaosem a výtvarným uměním.

Chaos je život, periodicita choroba, rovnováha smrt.

O čem je tento článek?

O deterministickém chaosu jako jednom typu chování dynamických systémů.

Proč je psán jako rozhovor?

Protože rozhovor je jedním z nejstarších a nejpřirozenějších způsobů sdělování myšlenek. Také proto, že čtenář z otázky rychle pozná, o čem je následující text, a může si jej přečíst, nebo přeskočit, a ví, kde pokračovat.

Co to znamená chaos?

Slovo chaos se používá nejčastěji ve třech různých souvislostech: v řecké mytologii, v běžném smyslu a ve spojení deterministický chaos.

Co znamená chaos v řecké mytologii?

Otevřeme-li studnici české vzdělanosti – Ottův slovník naučný z roku 1897 [23], dočteme se pod heslem Chaos o jeho řeckém původu toto:

Chaos (*χάος* od *χαίνω*, tedy zející prostor), u starých Řeků dle Hésioda prastav všehomíra, než byl vlastně stvořen a uspořádán, když látka veškera ještě v temnotách byla změtena. Potom vznikla Gaia (Země) a Erós (Láska), z Chaosu pak povstaly Erebos (Tma) a Nyx (Noc), jejichž dětmi byly Aithér a Hémerá. Dle učení orfiků však na počátku byl Chronos (Čas), z toho teprve vznikly Chaos a Aithér.

Jaký je běžný význam slova chaos?

Dnes slovo chaos v běžném významu znamená zmatek, nepořádek, nepřítomnost řádu, jednoty či jednotící síly. Tedy něco nepříjemného a nežádoucího.

Určitým protipólem k chaosu v tomto významu bylo slovo kosmos (z řeckého *κόσμοσ*), které původně znamenalo řád, dnes převážně prostor, vesmír.

Ze slova chaos vytvořil vlámský lékař a chemik Joan-Baptista van Helmont (1577–1644) slovo gas (plyn). To byl přirozený důsledek poznání, že to, co dnes označujeme slovem plyn, je výsledek složitého chování jeho molekul.

Co to znamená deterministický chaos?

Tento zdánlivý protimluv je dnes již ustálený odborný termín označující určitý typ složitého chování deterministického dynamického systému. Je to oproti běžnému významu slova chaos „dobrá zpráva“ v tom smyslu, že přívlastek deterministický říká, že jsme nalezli určitý řád, deterministické souvislosti v ději, který se dříve jevil jako nesrozumitelný.

Dále budeme slova chaos a chaotický používat pouze v tomto významu, nezdůrazníme-li jinak.

Co to znamená složité chování?

Volně řečeno, složitým chováním myslíme chování, které je

- omezené,
- neutuchající,
- neperiodické.

Co to je dynamický systém?

Uvažujme systém (např. mechanický, elektrický, chemický či biologický), jehož stav lze za jistých zjednodušujících předpokladů popsat v každém časovém okamžiku t souborem n reálných proměnných $x(t) \in R^n$, a nechť tento jeho stav jednoznačně vyplývá ze stavu v počátečním okamžiku. Označme symbolem $\phi_t(x)$ stav systému v čase t, jestliže jeho stav v čase 0 byl x. Potom $x(t_2) = \phi_{t_2 - t_1}(x(t_1))$ bude stav systému v čase t_2, jestliže jeho stav v čase t_1 byl $x(t_1)$. Množinu všech stavů systému nazýváme stavový neboli fázový prostor.

Zobrazení $\phi : R^n \times R \to R^n$ se nazývá dynamický systém na R^n, jestliže:

1. $\phi_0(x) = x$ pro všechna $x \in R^n$. Volně řečeno: vývoj za nulový čas nic nezmění.

2. Zobrazení $\phi_t : R^n \to R^n$ je difeomorfismus, tedy zobrazení, které je vzájemně jednoznačné, spojité a hladké, a to samé platí i o jeho inverzním zobrazení. Volně řečeno: určitému stavu v současnosti přísluší určitý a jediný stav v libovolném okamžiku v budoucnosti i v minulosti (který ovšem závisí na čase).
3. $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ pro všechna $t, s \in R$. Tedy skládání vývojů odpovídá sčítaní časů.

V praxi se často místo se zobrazením ϕ (nazývaným také tok) pracuje s vektorovým polem $f : R^n \to R^n$ na pravé straně soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (ODR)

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{1}$$

Označíme-li stav systému místo symbolem x slovem stav a nazveme-li předpis, který stavu systému přiřazuje rychlost změny (hnací sílu), místo symbolem f slovem fyzika, dostaneme s trochou nadsázky

$$\frac{d\ \text{stav}}{dt} = \text{fyzika (stav)}.$$

Soustava ODR (1) definuje dynamický systém se spojitým časem (spojitý dynamický systém), zatímco diferenční rovnice

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{2}$$

definuje dynamický systém s diskrétním časem (diskrétní dynamický systém).

Hovoříme-li tedy o vlastnostech dynamického systému, musíme vždy rozlišovat, máme-li na mysli systém s diskrétním či se spojitým časem.

Z toku ϕ lze snadno najít pole f pro (1) derivováním

$$f(x) = \frac{d\phi_t(x)}{dt}\Big|_{t=0}.$$

Obrácený postup je složitější. Je-li pole f v (1) Lipschitzovské, tj.

$$\exists k > 0 \forall x, y \in R^n \ \| f(x) - f(y) \| \le k \| x - y \|,$$

pak k danému poli f existuje jednoznačný lokální tok ϕ (a tedy i jednoznačné řešení dané soustavy diferenciálních rovnic), ale až na výjimečně jednoduché případy jej nelze vyjádřit analyticky. Podobně jako dovedeme derivovat každou hladkou funkci, ale vyjádřit primitivní funkci analyticky je, až na výjimečně jednoduché případy, nemožné.

Proč se zdůrazňuje, že jde o nelineární dynamický systém?

Dynamické systémy, a to platí pro diskrétní i spojité, se dělí na dvě disjunktní třídy: lineární a nelineární, podle toho, je-li zobrazení f lineární, či nikoliv. Připomeňme definici lineárního zobrazení.

Definice. Říkáme, že zobrazení f z vektorového prostoru do vektorového prostoru je lineární, jestliže platí

1. $f(cx) = cf(x)$,
2. $f(x + y) = f(x) + f(y)$

pro všechna $x, y \in D(f)$ a pro všechna $c \in R$.

Lineární systémy (konečné dimenze) jsou poměrně důkladně teoreticky prozkoumány, ale jejich řešení nemohou vykazovat chaos. Naproti tomu nelineární systémy jsou pro analytické zkoumání obtížné a v řadě případů se musíme (zatím) spokojit pouze s numerickou analýzou, která silně využívá moderní výpočetní techniku. Právě proto se této oblasti věnuje tak velká pozornost až v poslední době.

Zdůrazněme ještě, že z praktického pohledu rozdíl mezi lineárním a nelineárním systémem může záviset na volbě rozsahu hodnot. Např. elektrický zesilovač se pro malá vstupní napětí může chovat lineárně (výstupní napětí je přímo úměrné vstupnímu), zatímco pro velká vstupní napětí se bude chovat nelineárně (výstupní napětí bude omezené napájecím napětím).

Oboru, který studuje nelineární dynamické systémy, se říká nelineární dynamika a zasahuje do aplikované a numerické matematiky, fyziky, chemie, chemického inženýrství, biologie, ekonomie a dalších oborů.

Kde se pojem deterministický chaos objevil poprvé?

Poprvé byl pojem chaos v této souvislosti použit v práci [17] s dnes již legendárním názvem –„*Period three implies chaos*". Volně řečeno: jestliže pro nějakou spojitou funkci $f : R \to R$ v (2) existuje bod x s periodou 3, tedy bod, pro který platí $f(f(f(x))) = x$, potom existují body s libovolnou periodou.

Není bez zajímavosti, že tento výsledek plyne z obecnější věty, kterou dříve než Li a Yorke dokázal Šarkovskij [28]. Český komentář k této práci vyšel v [2].

Jaká je definice deterministického chaosu?

Devaney [6] definuje deterministický chaos (pro dynamický systém s diskrétním časem) třemi podmínkami:

1. citlivá závislost na počátečních podmínkách,
2. hustá množina periodických bodů,
3. tranzitivnost.

Co to je citlivá závislost na počátečních podmínkách?

Sledujme, co se stane, jestliže nepatrně změníme počáteční podmínku $x(0)$ pro ODR (1), resp. x_0 pro (2). Je-li změna malá a je-li pravá strana ODR spojitá, bude i změna pravé strany malá, tedy trajektorie vycházející z nové počáteční podmínky bude zpočátku blízká původní trajektorii. Budou-li se všechny takto změněné trajektorie (vycházející z jistého okolí původní počáteční podmínky) držet blízko původní trajektorie, říkáme, že je původní trajektorie stabilní.

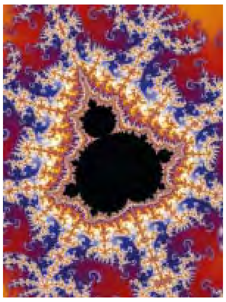
Naopak citlivou závislostí na počátečních podmínkách nazýváme stav, kdy se libovolně blízká trajektorie bude vzdalovat. V typickém případě se bude vzdalovat exponenciálně s časem.

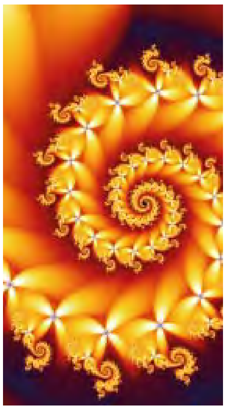
Chování této blízké trajektorie závisí na směru, kterým se počáteční podmínka změní. Existuje-li jak směr, ve kterém je trajektorie stabilní, tak i směr, ve kterém je nestabilní, pak takovou trajektorii nazýváme sedlo. To je typický případ.

Citlivá závislost na počátečních podmínkách má řadu závažných důsledků, jak pro numerické simulace, tak pro možnost předpovídání chování systému.

Závěrem tohoto odstavce bychom chtěli zdůraznit rozdíl mezi

- **citlivou závislostí na počátečních podmínkách**, která hovoří o rozbíhání trajektorií vycházejících ze dvou blízkých počátečních podmínek pro stejnou volbu parametrů, a
- **bifurkací**, která znamená kvalitativní změnu fázového portrétu, když vybraný parametr systému překročí kritickou, tzv. bifurkační hodnotu.





Co to je hustá množina periodických bodů?

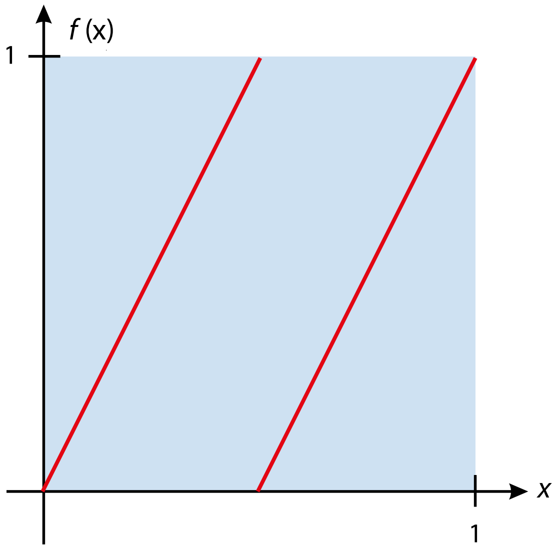
Periodickým bodem dynamického systému (2) rozumíme bod x, pro nějž existuje přirozené číslo k takové, že k-tá iterace bodu x je rovna bodu x, tedy $f^k(x) = x$.

Nejmenší takové číslo k se nazývá perioda bodu x. Bod s periodou 1 se nazývá pevný bod. Říkáme, že množina A je hustá v množině B, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a každý bod $y \in B$ existuje bod $x \in A$ takový, že $\| x - y \| < \varepsilon$.

Příklad: Ukažme si systém s hustou množinou periodických bodů. Uvažujme dynamický systém (nazývaný Bernoulliho shift čili posun)

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad \text{kde} \qquad f(x) = 2x \bmod 1 \qquad (3)$$

pro $x \in <0;1)$, viz obr. 1.



Obr. 1 Bernoulliho shift představuje elementární příklad systému s hustou množinou periodických bodů a také elementární příklad deterministického chaosu.

Zapíšeme-li číslo $x \in <0;1)$ ve dvojkové soustavě, potom s každou iterací funkce f se díky násobení dvěma všechny číslice posunou o jedno místo doleva. A díky operaci mod 1 se vynulují všechna místa vlevo od desetinné čárky. Ukážeme, že toto zobrazení má hustou množinu periodických bodů. Ke každému $y \in <0;1)$ a ke každému $\varepsilon > 0$ vytvoříme $x \in <0;1)$ tak, aby

1. x byl periodický bod systému (3), tedy aby určitá iterace funkce f na tento bod dala opět tento bod; to ale v případě Bernoulliho shiftu vlastně znamená, že se určitá konečná posloupnost číslic v dvojkovém zápisu čísla x musí periodicky opakovat, a
2. aby byl bod x bodu y blíže než ε. K tomu je nutné a stačí, aby se dvojkové zápisy čísel x a y shodovaly na prvních k místech, kde k je $-\ln_2 \varepsilon$ zaokrouhleno nahoru.

Takže číslo x vytvoříme tak, že opíšeme prvních k dvojkových číslic čísla y a za ně tuto stejnou skupinku číslic periodicky stále opisujeme. Tak dostaneme bod x s periodou k, který se na prvních k místech shoduje s y, takže je od něj vzdálen méně než ε.

Tento dynamický systém je důležitý, protože je to také elementární příklad systému vykazující deterministický chaos.

Co to znamená tranzitivnost?

Definice: Zobrazení $f: X \to X$ je (topologicky) tranzitivní na nějaké invariantní množině Y, jestliže orbita $\{f^n(p)\}$ nějakého bodu p je hustá v Y.

Birkhoff dokázal, že f je tranzitivní na Y právě tehdy, když pro libovolné dvě množiny U, V otevřené v Y existuje kladné n takové, že $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Volně řečeno, že se odkudkoliv (občas) dostaneme libovolně blízko kamkoliv.

Co to znamená míchající systém?

To je silnější podmínka: f je míchající, když pro libovolné dvě otevřené množiny $U, V \subset Y$ existuje n_0 takové, že $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ pro všechna $n > n_0$. Volně řečeno, obrazy U se jednou překryjí s V a už ji nikdy zcela neopustí.

Jsou tyto tři podmínky v Devaneyho definici chaosu nezávislé?

Nejsou. Např. Banks et al. [4] dokázali, že z tranzitivity a husté množiny periodických bodů plyne citlivá závislost na počátečních podmínkách.

Co to jsou Ljapunovovy exponenty?

Ljapunovovy exponenty jsou čísla, která popisují rozbíhavost blízkých trajektorií. Zhruba řečeno, vzdálenost blízkých trajektorií je úměrná $\exp(\lambda n)$ pro diskrétní čas a $\exp(\lambda t)$ pro spojitý čas, kde λ je Ljapunovův exponent. Kladné λ značí rozbíhání, záporné λ značí přibližování trajektorií. Je-li alespoň jeden Ljapunovův exponent kladný, je to považováno za dostatečný signál, že se studovaný systém chová chaoticky (pro zvolené počáteční podmínky a zvolené hodnoty parametrů).

Trochu přesněji, pro dynamický systém s diskrétním časem $x_{n+1} = f(x_n)$ lze časový vývoj odchylky vyjádřit diferenciálem $dx_{n+1} = J(x_n) \cdot dx_n$, kde

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

je Jacobiho matice parciálních derivací zobrazení f. Potom

$$dx_n = \prod_{i=0}^{n-1} J(x_i) \cdot dx_0$$

je lineární závislost dx_n na dx_0. Tedy obrazem jednotkové koule je elipsoid. Ljapunovovy exponenty jsou střední hodnoty logaritmu rychlosti růstu jeho poloos

$$\lambda(dx_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\| dx_n \|}{\| dx_0 \|}.$$

Ty závisí na volbě dx_0. Pro různé volby dx_0 dostaneme tolik Ljapunovových exponentů, kolik je dimenze stavového prostoru (tolik poloos má výše zmíněný elipsoid). A největší Ljapunovův exponent je

$$\lambda_{\max} = \sup_{dx_0} \lambda(dx_0).$$

Tuto hodnotu dostaneme pro skoro všechny volby dx_0. Pro dynamický systém se spojitým časem

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

lze časový vývoj odchylky $y(t) = \delta x(t)$ vyjádřit variační rovnicí

$$\frac{dy}{dt} = J(x(t)) \cdot y(t).$$

Zde závislost $y(t)$ na $y(0)$ je opět lineární a tedy obrazem jednotkové koule je opět elipsoid. Ljapunovovy exponenty jsou opět střední hodnoty logaritmu rychlosti růstu jeho poloos

$$\lambda(y(0)) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln \frac{\| y(T) \|}{\| y(0) \|}$$

a největší Ljapunovův exponent je opět

$$\lambda_{\max} = \sup_{y(0)} \lambda(y(0)).$$

Tuto hodnotu dostaneme opět pro skoro všechny volby $y(0)$. Určité hodnoty Ljapunovových exponentů přísluší jedné konkrétní orbitě $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ (pro diskrétní čas), popř. jedné konkrétní trajektorii $x(t)$ (pro spojitý čas), tedy určité počáteční podmínce a určité volbě hodnot parametrů, pokud zobrazení f závisí na parametrech.

Vyšetřování závislosti Ljapunovových exponentů na počátečních podmínkách a na parametrech patří mezi časté úlohy, které odhalí o systému důležité informace využitelné i z praktického hlediska.

Jak se Ljapunovovy exponenty počítají?

Hledání Ljapunovových exponentů se provádí dvěma zcela rozdílnými způsoby podle toho, je-li znám dynamický systém, nebo ne:

1. Je-li znám model, můžeme použít postup uvedený v předchozí části, tedy numerickou integrací variačních rovnic spolu s původní soustavou ODR v případě spojitého času, nebo násobení Jacobiho matic v případě diskrétního času.
2. Není-li znám model a máme k dispozici pouze experimentální data např. v podobě časové řady, musíme nejprve použít metodu zpoždění pro rekonstrukci atraktoru a potom počítat Ljapunovovy exponenty porovnáním změn vzdáleností blízkých bodů a jejich následovníků.

Zde se budeme zabývat pouze případem, kdy je model znám.

Můžeme si uvést nějaký příklad?

Spočtěme Ljapunovův exponent pro systém (3). Protože se jedná o jednorozměrný systém, má jediný Ljapunovův exponent. A protože $f'(x)=2$, je Ljapunovův exponent $\lambda=\ln 2$ nezávisle na počáteční podmínce. Tento systém nemá parametry, takže nelze vyšetřovat závislost Ljapunovových exponentů na parametrech.

Ještě jeden příklad?

Uvažujme plyn při pokojové teplotě za normálního tlaku uzavřený v nádobě tvaru kvádru, viz [8]. Jeho molekuly vzájemnými srážkami neustále mění své polohy a rychlosti. Odhadněme největší Ljapunovův exponent $\lambda_{\max}$ odpovídající dynamice jejich vzájemných srážek. Předpokládejme pro jednoduchost, že molekuly plynu jsou identické koule. Bylo by sice zajímavější uvažovat dvouatomární plyn, protože to je blíže vzduchu, ve kterém žijeme, ale nám zde bude stačit toto hrubé přiblížení pro alespoň řádový odhad Ljapunovova exponentu.

Srážku dvou molekul popíšeme v takové souřadné soustavě, kde je jejich společné těžiště v klidu a v počátku soustavy. Z obr. 2 lze odvodit závislost úhlu α, ve kterém je zalomena dráha molekuly, na vzdálenosti b středu molekuly od přímky procházející počátkem a rovnoběžné s rychlostmi molekul před srážkou

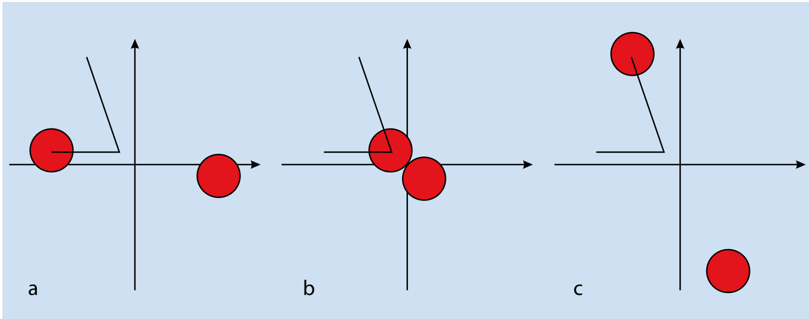
$$\alpha=\pi-2\arcsin\frac{2b}{d},$$

kde d je průměr molekuly.

Malá změna $\delta\alpha_0$ směru dráhy jedné molekuly se po střední volné dráze $l\approx 10^{-6}$ m molekuly mezi dvěma srážkami projeví jako $\delta b\approx l\delta\alpha_0$, a tato změna se po srážce projeví jako nová změna úhlu

$$\delta\alpha_1=\frac{4}{d\,|\sin\alpha/2|}\delta b\approx\frac{4}{d}\delta b\approx\frac{4l}{d}\delta\alpha_0,$$

takže po n srážkách bude odchylka



Obr. 2 Dvě molekuly (a) před srážkou, (b) při srážce, (c) po srážce.

$$\delta\alpha_n\approx\left(\frac{4l}{d}\right)^n\delta\alpha_0.$$

Označíme-li střední dobu mezi dvěma srážkami

$$T_1=\frac{l}{v},$$

kde

$$v=\sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$$

je střední kvadratická rychlost molekul, $k_B\approx 1{,}38\times10^{-23}$ J/K je Boltzmannova konstanta, $T\approx 300$ K je absolutní teplota, $m\approx 5\times10^{-26}$ kg je hmotnost jedné molekuly, $d\approx 10^{-10}$ m je průměr molekuly, $\rho\approx 3\times10^{25}$ m^{-3} je počet částic na jednotku objemu, bude největší Ljapunovův exponent

$$\lambda_{\max}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT_1}\ln\left|\frac{\delta\alpha_n}{\delta\alpha_0}\right|\approx\frac{v}{l}\ln\frac{4l}{d}\approx 5\times10^9\ \text{nat/s}.$$

Jednotka nat značí, že jsme použili přirozený logaritmus – kdybychom použili dekadický logaritmus, byl by výsledek v digits/s.

Jaký je rozdíl mezi disipativním a konzervativním systémem?

Máme-li deterministický dynamický systém, např. soustavu obyčejných diferenciálních rovnic, potom je-li pravá strana ODR Lipschitzovská, z každé počáteční podmínky – z každého bodu ve fázovém prostoru – vychází právě jedna trajektorie – křivka ve fázovém prostoru. Uvažujme nyní malou kouli počátečních podmínek a její vývoj v čase. Tento útvar, původně koule v čase 0, se bude s časem deformovat. Důležitá otázka je, jak se mění s časem t objem $V(t)$ tohoto útvaru

$$\frac{dV}{dt}=\oint_{S(t)}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}=\int_{V(t)}\operatorname{div}\mathbf{f}\,dV.$$

Dynamické systémy, pro které je tento objem v čase konstantní, tedy pro které je div $\mathbf{f}=0$, se někdy nazývají konzervativní. Sem patří např. hamiltonovské systémy. Tyto systémy se objevují jako modely mechanických systémů, kde neuvažujeme disipaci energie třením (energie je tedy zachována, angl. *conserved* – odtud název konzervativní), a používají se při popisu mikroskopických systémů a také při studiu nebeské mechaniky. Ve skutečnosti vždy k disipaci energie dochází (např. v případě nebeské mechaniky slapové síly vyvolávají příliv a odliv, čímž je část mechanické energie disipována).

Naproti tomu u modelů, které popisují systémy s lidskými měřítky, bývá div $\mathbf{f}<0$.

Takovéto systémy se nazývají disipativní a objem sledované oblasti fázového prostoru s časem klesá k nule.

» *Pro chaotické chování je typická citlivá závislost na počátečních podmínkách.* «

Co to je atraktor?

Zhruba řečeno, atraktor je množina ve fázovém prostoru, ke které jsou přitahovány (atrahovány) trajektorie. Přesněji: je to množina, která splňuje tyto tři podmínky:

- Je invariantní, tzn. že trajektorie, která v této množině začíná, ji neopustí.
- Má oblast přitažlivosti, tj. otevřenou množinu takovou, že trajektorie, které v této množině začínají, se přibližují k atraktoru.
- Je nerozložitelná, tzn. že nemá vlastní podmnožinu (tj. podmnožinu, která se nerovná této množině), která splňuje výše uvedené dvě podmínky.

Daný dynamický systém může mít jeden nebo více koexistujících atraktorů. Každý atraktor pak má svoji oblast přitažlivosti. Ke kterému z možných atraktorů se určitá trajektorie bude přibližovat, závisí na počátečních podmínkách.

Opakem atraktoru je repelor, tedy množina, od které se trajektorie vzdalují. Při inverzi času přejde atraktor na repelor a naopak.

Pokud je invariantní množina stabilní pouze v určitém směru a v jiném směru nestabilní, pak se nazývá sedlo.

Co to je fraktál?

Volně řečeno, fraktál je množina, která má velice členitou hranici. Když se na tuto hranici podíváme v jemnějším měřítku (dnes se říká, že provedeme zoom), tak objevíme další detaily, které mohou být podobné původnímu obrazu. Proto se takovým množinám také říká samopodobné (self-similar).

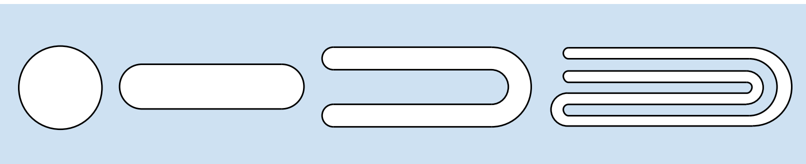
Jak souvisí fraktály a chaos?

Při studiu dynamických systémů se často setkáme s fraktály ve dvou různých případech:

- Atraktor chaotického dynamického systému může (ale nemusí) být fraktálem.
- Při studiu závislosti typu chování dynamického systému na vybraných parametrech systému nebo na počátečních podmínkách může množina v parametrickém prostoru, která odpovídá danému typu chování, mít fraktální strukturu.

Jak vzniká fraktální atraktor?

Pro chaotické chování je typická citlivá závislost na počátečních podmínkách. Takže naše koule ve fázovém prostoru se bude v jednom (nebo více) směrech roztahovat a v jiných směrech naopak smršťovat. Počet směrů, ve kterých se roztahuje, je roven počtu kladných Ljapunovových exponentů. V případě modelů reálných fyzikálních systémů je vývoj omezen v jisté ohraničené části fázového prostoru. Potom vedle roztahování musí docházet ke skládání (angl. *stretching and folding*). To je schematicky znázorněno na obr. 3.



Obr. 3 Schematické znázornění roztahování a skládání ve fázovém prostoru. Malá koule počátečních podmínek se roztahuje v některých směrech a současně smršťuje v jiných směrech. Přitom se tento útvar ohýbá a skládá tak, že vyplní podobnou část fázového prostoru jako původní koule, ale řidčeji – prostřední část chybí. Tento proces se neustále opakuje, čímž vzniká fraktální struktura.

Při jednom takovém kroku dostaneme útvar, ve kterém v průřezu chybí prostřední část o relativní velikosti q, např. 33 %. V dalším kroku ze zbývajících krajních částí opět zmizí jejich prostřední část o relativní velikosti q atd. Po nekonečně mnoha takovýchto krocích vznikne útvar, který se nazývá Cantorova množina.

Spočtěme si kapacitní dimenzi Cantorovy množiny, kterou dostaneme z jednotkové úsečky tak, že při každém kroku odstraníme z každé souvislé části prostřední díl o relativní velikosti q.

Dimenzi lineárního vektorového prostoru lze definovat jako počet prvků báze. Např. dimenze přímky je 1, dimenze roviny je 2. Kapacitní dimenze (angl. *capacity dimension* nebo také *box counting dimension*) dané množiny je zobecněním pojmu dimenze následujícím způsobem. Nechť $N(\varepsilon)$ je nejmenší počet hyperkrychliček o hraně ε nutných pro pokrytí dané množiny.

Např. pro pokrytí jednotkové úsečky úsečkami o délce ε je třeba alespoň $N(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}$ těchto malých úseček. Říkáme, že úsečka má dimenzi 1. Pro pokrytí jednotkového čtverce malými čtverečky o délce hrany ε je třeba alespoň $N(\varepsilon)=(\frac{1}{\varepsilon})^2$ těchto malých čtverečků. Říkáme, že čtverec má dimenzi 2. Pro pokrytí jednotkové krychle malými krychličkami o délce hrany ε je třeba alespoň $N(\varepsilon)=(\frac{1}{\varepsilon})^3$ těchto malých krychliček. Říkáme, že krychle má dimenzi 3.

Kapacitní dimenze je definována jako exponent ve vztahu mezi nutným počtem N malých hyperkrychliček o délce hrany ε a jejich hranou ε

$$N(\varepsilon)\approx\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^D,$$

tedy

$$D=\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\ln N(\varepsilon)}{-\ln\varepsilon}. \tag{4}$$

Vraťme se zpět k naší Cantorově množině. Po n děleních je třeba $N_n=2^n$ úseček o délce

$$\varepsilon_n=\left(\frac{1-q}{2}\right)^n,$$

takže její kapacitní dimenze je

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln N_n}{-\ln\varepsilon_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2^n}{-\ln\left(\frac{1-q}{2}\right)^n}=\frac{\ln 2}{\ln 2-\ln(1-q)}.$$

Např. pro $q=1/3$ dostaneme

$$D=\frac{\ln 2}{\ln 3}\doteq 0{,}63093.$$

Nabízí se otázka, jaká bude dimenze útvaru, který vznikne z úsečky tak, že v každém kroku odstraníme část, která není prostřední. Ještě obecněji můžeme uvažovat množinu, která se skládá z m podmnožin, přičemž k-tá podmnožina je r_k-krát zmenšená verze původní množiny. Pro přiblížení, v našem předcházejícím příkladě Cantorovy množiny jsme měli $m=2$ a poměry zmenšení byly

$$r_1=r_2=\frac{2}{1-q}.$$

Hledáme dimenzi D, pro kterou platí (4). Pro pokrytí k-té podmnožiny hyperkrychličkami o hraně ε je zapotřebí právě tolik hyperkrychliček jako pro pokrytí celé množiny hyperkrychličkami o hraně $r_k\varepsilon$, tedy

$$N_k=\left(\frac{1}{r_k\varepsilon}\right)^D.$$

Součet těchto čísel je počet hyperkrychliček nutných pro pokrytí celé množiny, tedy

$$\sum_{k=1}^{m} N_k = N\,,$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{r_k\,\varepsilon}\right)^D = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^D,$$

a tak dostáváme vztah

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{r_k}\right)^D = 1,$$

z něhož lze určit dimenzi i v tomto obecném případě.

Jak souvisí dynamika a fraktální atraktor?

Odvoďme kvalitativní vztah mezi časovým popisem chaotičnosti dynamického systému, tedy Ljapunovovými exponenty, na jedné straně a statickými geometrickými vlastnostmi traktoru, tedy jeho kapacitní dimenzí, na straně druhé. Uvažujme pro jednoduchost trojrozměrný dynamický systém se spojitým časem se třemi Ljapunovovými exponenty:

- $\lambda_1 > 0$ (ten souvisí s citlivou závislostí na počátečních podmínkách);
- $\lambda_2 = 0$ (ten odpovídá změně počáteční podmínky ve směru trajektorie);
- $\lambda_3 < 0$ (ten souvisí se smršťováním).

Pro disipativní systém bude $\lambda_1 + \lambda_3 < 0$.

Uvažujme vývoj po takový čas T, aby $\exp(\lambda_1 T) = 2$, tedy aby se původní množina počátečních podmínek roztáhla dvakrát. Za tuto dobu se ve směru odpovídajícím smršťování vytvoří skládáním uprostřed mezera o relativní šířce q a dvě postranní části o relativní šířce

$$\frac{1-q}{2} = \exp(\lambda_3 T).$$

Takže $q = 1 - 2\exp(\lambda_3 T)$ a kapacitní dimenze atraktoru bude

$$D = 2 + \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln(2\exp(\lambda_3 T))} = 2 + \frac{\ln 2}{-\lambda_3 T} = 2 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_3|}.$$

Dvojka, kterou přidáváme, odpovídá dvěma dalším směrům (směr trajektorie a směr rozpínání). Tento vztah se nazývá Kaplanova-Yorkova domněnka a uvádí do souvislosti statické vlastnosti atraktoru vyjádřené dimenzí a dynamické vlastnosti vyjádřené Ljapunovovými exponenty.

Musí být podivný atraktor chaotický a naopak?

Atraktory, které mají neceločíselnou dimenzi, se nazývají podivné (angl. *strange*) atraktory. Atraktory dynamických systémů s citlivou závislostí na počátečních podmínkách se nazývají chaotické atraktory. Protože je častý případ, kdy je atraktor jak podivný, tak chaotický, bývají tyto dva pojmy často zaměňovány. Přesto existují i podivné nechaotické atraktory [24, 25].

Jak vznikají fraktály v parametrickém prostoru?

Uvažujme např. diskrétní dynamický systém se dvěma parametry

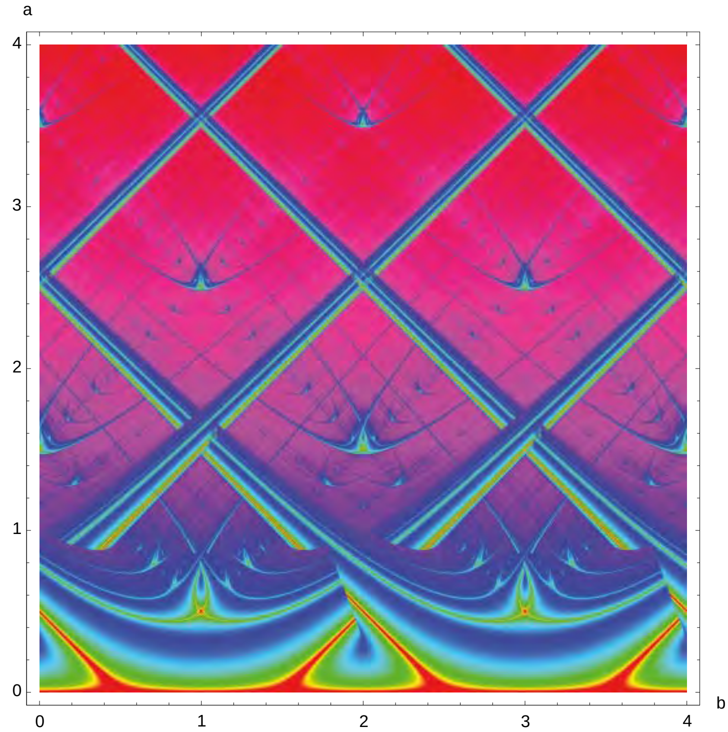
$$x_{n+1} = f_{a,b}(x_n), \tag{2}$$

kde

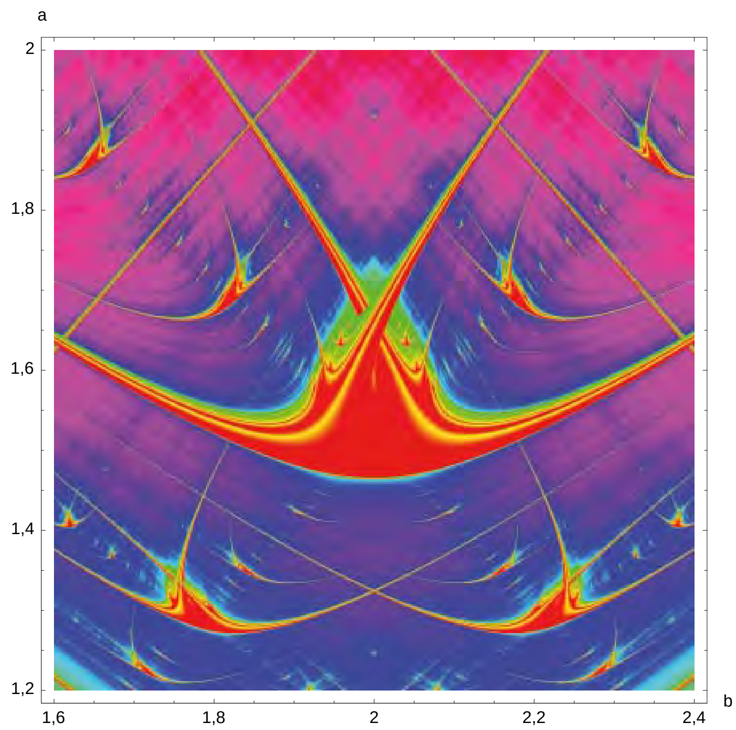
$$f_{a,b}(x) = a\sin(\pi x) + b.$$

Pro $a = b = 0$ má tento systém jediný pevný bod $x = 0$, který je stabilní. Při rostoucím parametru a ztratí pevný bod $x = 0$ stabilitu, když parametr a překročí kritickou hodnotu $a_1 = \frac{1}{\pi} \doteq 0{,}31831$, a dojde k bifurkaci typu vidlička (*pitchfork bifurcation*). Při ní vlastní číslo linearizovaného systému (derivace funkce f) opustí jednotkovou kružnici v bodě $z = 1$. Vznikne dvojice nových pevných bodů, které jsou stabilní.

Při dalším zvětšování parametru a dojde k bifurkaci zdvojení periody (*period doubling bifurcation*) při překročení kritické hodnoty $a_2 \doteq 0{,}719962$. Při této bifurkaci vlastní číslo linearizovaného systému opustí jednotkovou kružnici v bodě $z = -1$, tyto dva pevné body ztratí stabilitu a z každého z nich se odvětví křivka dvouperiodických bodů.



Obr. 4 Závislost Ljapunovova exponentu systému (5) na parametrech *a* a *b*



Obr. 5 Výřez z obrázku 2 ukazující fraktální strukturu v parametrickém prostoru

» Na chaosu je krásné, že touto citlivou závislostí na počátečních podmínkách, tímto roztahováním ve fázovém prostoru příběh nekončí. Vzápětí nastává skládání a děj se opakuje, ale nikdy ne stejně. «

Následuje Feigenbaumova kaskáda zdvojování periody a oblast deterministického chaosu. Při dalším růstu parametru a se střídají okna s periodickým a chaotickým režimem.

Pevný bod je řešením rovnice $f_{a,b}(x) = x$.

Je-li navíc $f'_{a,b}(x) = 0$, nazývá se takový pevný bod superstabilní. Jeho Ljapunovův exponent

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \ln|\, f'(x_n)\,|$$

je $\lambda = -\infty$. Snadno lze odvodit, že tyto superstabilní pevné body našeho dynamického systému odpovídají parametrům, které splňují podmínku

$$b \pm a = k + \frac{1}{2}, \quad k \in Z.$$

Tato podmínka popisuje v parametrickém prostoru $a - b$ jakousi mřížku tvořenou dvěma soustavami rovnoběžných přímek.

Vyneseme-li závislost Ljapunovova exponentu na parametrech a a b, dostaneme obr. 4. Ten má fraktální strukturu, kterou lze pozorovat při zobrazení detailu na obr. 5.

Proč fraktály tak lahodí lidskému oku?

Protože jsou časté v přírodě, zejména v živé přírodě: koruny stromů, kořeny rostlin, cévy v lidském těle, struktura našich plicních sklípků – to jsou případy, kde příroda dociluje velkého povrchu při malém počtu stavebních kamenů strukturou, kterou (na jistém rozsahu měřítek) lze považovat za fraktální.

Vyskytují se fraktály v umění?

Fraktální struktura je lidskému oku příjemná tím, že když se podíváme zblízka, máme stále co objevovat.

A proto se fraktály objevují s oblibou i ve výtvarném umění. Jedním z nejznámějších malířů, který se vydal tímto směrem, je Maurits Cornelis Escher (1898–1972) [7], viz obr. 6; z českých malířů František Kupka (1871–1957), viz obr. 7.

Setkáme se s chaosem v běžném životě?

S citlivou závislostí na počátečních podmínkách, typickou pro deterministický chaos, se setkáváme na každém kroku. Většinou je to výsledek kladné zpětné vazby, tedy děje, kdy jistá odchylka má za následek další růst této odchylky.

Obr. 6 Obrazy M. C. Eschera připomínají fraktální množiny.

Obr. 7 František Kupka, rodák z Opočna, byl jedním z prvních českých malířů, v jejichž dílech se objevují fraktální motivy.

Např. podnikatel, který má na začátku jen o trochu větší kapitál než jeho konkurent, si může dovolit nakoupit dokonalejší technologii. Tím má větší produktivitu práce, větší zisk, tím si může dovolit ještě dokonalejší technologii, tím má ještě větší zisk atd.

Nebo představte si polní cestu. Utvoří-li se na ní malinká jamka, bude v ní po dešti malinká kaluž. Projede po ní automobil a tuto malinkou kaluž vyšplouchne. Tím prohloubí jamku. Při dalším dešti se v ní vytvoří větší kaluž, další automobil vyšplouchne více bláta, tím se jamka dále prohloubí atd.

Něco podobného se odehrává i ve vztahu dvou lidí, např. studenta a studentky. Vznikne-li mezi nimi náklonnost malinko větší než mezi ostatními, budou více vyhledávat společné chvíle. Tím se více poznají, prohloubí se jejich vzájemná náklonnost atd.

Podobnou nestabilitu vykazuje i lidská společnost jako celek v otázce vyzbrojení. Jeden návrh na řešení problému násilí a válek dává pacifismus: bylo by to krásné, kdybychom zničili všechny zbraně. Pak by konečně zavládl mír. Tento stav by ale byl nestabilní: kdyby si některý jedinec či skupina lidí pořídili malou zbraň, získali by malou převahu nad okolím, mocenskou i hmotnou. Tím by si mohli dovolit pořídit větší zbraň a tím by získali větší převahu atd.

Na chaosu je krásné, že touto citlivou závislostí na počátečních podmínkách, tímto roztahováním ve fázovém prostoru příběh nekončí. Vzápětí nastává skládání a děj se opakuje, ale nikdy ne stejně.

Jaké jsou důsledky chaosu na předpovídatelnost?

Citlivá závislost na počátečních podmínkách představuje omezení možnosti činit předpovědi. Jestliže je největší Ljapunovův exponent systému $\lambda_{\max} > 0$ a známe-li současný stav systému s přesností $\varepsilon_{\text{initial}}$, pak nepřesnost roste exponenciálně s časem

$$\varepsilon_t \approx \varepsilon_{\text{initial}} \exp(\lambda_{\max} t).$$

Požadujeme-li předpověď stavu systému s přesností $\varepsilon_{\text{final}}$ za čas t, nemůže být tento čas větší než

$$t_{\text{Ljap}} \approx \frac{1}{\lambda_{\max}} \ln \frac{\varepsilon_{\text{final}}}{\varepsilon_{\text{initial}}}.$$

To je zásadní omezení, o kterém se v současnosti míní, že je nelze obejít.

Co to je efekt motýlích křídel?

Citlivá závislost na počátečních podmínkách má ještě další důsledky. Nejenže malá chyba určení počátečního stavu přeroste požadovanou chybu předpovědi, ale i sebemenší odchylka stavu se v konečné době projeví jako odchylka srovnatelná s velikostí stavových veličin. Tomu se někdy říká efekt motýlích křídel. V literatuře to bývá ilustrováno na hypotetickém příkladě, kdy změna proudění vzduchu způsobená mávnutím motýlích křídel se za konečnou dobu může projevit ničivou bouří na druhém konci zeměkoule.

Já si dovoluji nabídnout příjemnější ilustraci: mávnutí křídel jedné babočky (viz obr. 8) na druhém konci zeměkoule způsobilo, že dnes se ve vašem městě nevyskytla ničivá bouře a vy si můžete v klidu číst tento článek.

Kde končí determinismus (a začíná náhoda)?

Úlohy z teorie nelineárních dynamických systémů obvykle patří do jedné ze dvou velkých tříd:

- Máme k dispozici model ve tvaru diferenciálních nebo diferenčních rovnic sestavený pomocí fyzikálních a jiných zákonů na základě našich znalostí o studovaném problému. Potom můžeme vyšetřovat vlastnosti řešení tohoto modelu např. v závislosti na počátečních podmínkách či parametrech a porovnávat numerické výsledky z modelu s experimentálně naměřenými údaji.
- Model neznáme, máme k dispozici pouze experimentální data, např. ve tvaru časové řady jedné nebo více fyzikálních veličin měřených v závislosti na čase.

V tomto druhém, obtížnějším případě musíme nejprve rozhodnout, lze-li časovou řadu považovat za výstup z nějakého deterministického dynamického systému, nebo zda jde o výsledek děje příliš složitého na to, abychom byli schopni jej popsat deterministickým systémem – pak takový děj nazýváme náhodným neboli stochastickým, někdy šumem. Zdůrazněme, že náhodnost není vlastnost systému samotného, ale je to vlastnost dvojice: systém a pozorovatel. Systém, který se jednomu pozorovateli může zdát náhodný, tedy překračující jeho schopnosti detekovat deterministický původ, se může jinému pozorovateli jevit jako deterministický, například proto, že má k dispozici více informací.

To lze doložit třeba dětskou hrou na rozpočítávání. Jistě to znáte: En-ten-tý-ky dva špa-lí-ky, čert vy-le-těl z e-lek-tri-ky… Je-li dán počet osob a počet slabik básničky, pak volbou osoby, na kterou padne první slabika, je jednoznačně dána osoba, na kterou padne poslední slabika. To si děti neuvědomují. Dospělí si to uvědomují, a proto hrají jiné hry. Není to tak dávno, kdy na téměř každém českém nádraží bylo možné spatřit skořápkáře – muže s malým stolkem, na němž měl několik kelímků dnem vzhůru. Pod jedním z kelímků byla malá kulička. Na začátku kelímek obrátil, aby vám ukázal, kde je kulička. Pak kelímky chvíli rychle přemísťoval po stolku, a poté vás vyzval, abyste ukázali na kelímek, pod nímž je kulička. Před obrácením kelímku mu dáte nějakou velkou bankovku. Když je kulička pod kelímkem, který obrátíte, dostaneme dvojnásobek své sázky. Když není, nedostanete nic. Do dneška mi není jasné, jestli jsem tenkrát prohrál 500 korun, protože jsem nedával dost pozor, nebo jestli skořápkář podváděl.

Obr. 8 *Vanessa virginiensis* (americká babočka), motýl, který vám možná zachránil život. Proč? Protože krátce před vyfotografováním Kennethem Dwainem Harrelsonem 4. června 2007 zamával křídly, a tím možná odvrátil ničivou bouři ve vašem městě právě dnes.

Podívejme se podrobněji na hranici mezi determinismem a nahodilostí. Zjednodušeně řečeno, o deterministické dynamice hovoříme, jestliže blízké stavy systému mají podobné následující vývoje. Abychom získali blízké stavy, musíme mít k dispozici dostatečný počet bodů. Např. abychom mezi body přibližně rovnoměrně rozloženými na úsečce jednotkové délky získali dostatek dvojic bodů bližších než ε, musíme mít alespoň

$$N \approx \frac{1}{\varepsilon}$$

bodů. Tento počet roste s dimenzí: abychom získali mezi body přibližně rovnoměrně rozloženými na jednotkovém čtverci dostatek dvojic bodů bližších než ε, musíme mít alespoň

$$N \approx \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$$

bodů. Pro obecnou dimenzi D potřebujeme alespoň

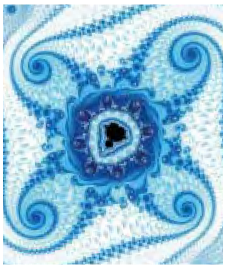
$$N \approx \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^D$$

bodů.

Kolik potřebujeme bodů, chceme-li odhalit deterministickou dynamiku systému s diskrétním časem s největším Ljapunovovým exponentem λ, tedy systému, ve kterém se body vzdálené ε při jednom kroku zobrazí na body vzdálené $\varepsilon \exp \lambda$? Potřebujeme tolik bodů, abychom získali dvojice bodů natolik blízké, že i po jednom kroku budou blízké, tedy

$$\begin{aligned} \varepsilon \exp \lambda &< 1, \\ \frac{1}{\varepsilon} &> \exp \lambda, \\ \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^D &> \exp(\lambda D), \\ N &> \exp(\lambda D). \end{aligned} \tag{6}$$

Toto je vztah zásadního významu při posuzování mezi deterministickými a tzv. náhodnými ději. Je-li dimenze D problému dostatečně nízká a je-li chaotičnost systému (vyjádřená největším Ljapunovovým exponentem) dostatečně malá, pak lze pozorovat deterministic-



ký původ signálu. Je-li však dimenze problému vysoká (jak je tomu v případě mnoha systémů z reálného světa) a je-li chaotičnost vysoká, je nemožné z malého počtu bodů vyčíst zákonitosti, které dávají vzniknout studovanému signálu. Např. pro $\lambda = 10$ a $D = 10$ je požadavek $N > \exp 100 \doteq 10^{43}$ zcela mimo současné (a asi i budoucí) možnosti.

Dokonce i v případě, že je D nízké, ale λ vysoké natolik, že jejich součin je vysoký, je nemožné odhalit determinismus. To je případ běžných generátorů pseudonáhodných čísel používaných na současných počítačích. Jaká je hranice, kdy se softwarový generátor pseudonáhodných čísel běžící na deterministickém počítači bude již jevit jako deterministický? Např. generátor drand 48, který je součástí standardní knihovny funkcí jazyka C, používá algoritmus

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \bmod m\,, \qquad (7)$$

kde $m = 2^{48}$ (odtud pochází název), $a = 5DEECE66D_{16} \doteq 3\times10^{10}$, $c = 11$. Výstupem jsou pak hodnoty x_n/m. Snadno určíme Ljapunovův exponent $\lambda = \ln a \doteq 24$, a tedy počet bodů nutný pro odhalení deterministického algoritmu je podle (6) $N > \exp(\lambda D) = a \doteq 3\times10^{10}$.

Takže pokud tento generátor použijeme pro generování méně než řádově 10^{10} bodů, nelze jej považovat za deterministický, což v praxi bohatě stačí.

Tento příklad lze použít ještě pro grafické vysvětlení podmínky (6). Budeme-li vynášet do grafu body v rovině o souřadnicích $(x_{n+1}/m, x_n/m)$, potom pro (7) dostaneme body, které budou přibližně rovnoměrně rozloženy v jednotkovém čtverci. Při malém počtu bodů nebude patrná žádná struktura v tomto grafu. Teprve při počtu bodů větším než řádově 10^{10} bude vidět, že body leží na úsečkách, které tvoří graf funkce (7). Tyto úsečky však mají velkou směrnici, a tudíž leží blízko u sebe, proto jsou při malém počtu bodů nepozorovatelné.

Poznamenejme ještě, že podmínka (6) je nutná, ale ne postačující. Např. pro $\lambda = 0{,}1$ a $D = 3$ tato podmínka dává $N > \exp 0{,}3 \doteq 1{,}3$, což rozhodně neznamená, že ze dvou bodů lze usuzovat na deterministický původ signálu.

Podmínku (6) lze částečně obejít, pokud máme možnost volby počátečních podmínek a můžeme pozorovat vývoj z různých blízkých počátečních podmínek, které máme možnost nastavovat tak, abychom vytvořili blízké body. Potom nepotřebujeme tak vysoký počet bodů.

Poznamenejme ještě, že i jednoduchá dynamika se začne jevit jako složitá, pokud máme k dispozici ne všechny body časové řady, ale pouze každou např. k-tou hodnotu. Potom je Ljapunovův exponent k násobkem původního Ljapunovova exponentu.

Co to znamená pro kauzalitu a svobodnou vůli?

Mohlo by se zdát, že rozdíl mezi determinismem a náhodou tedy spočívá pouze v množství dat, která máme k dispozici. Že kdybychom měli dostatek měření, tak bychom mohli každý signál odhalit jako výsledek deterministického dynamického systému. Tato myšlenka se v dějinách lidského poznání v různých podobách opakovaně vrací, nejčastěji jako spor mezi kauzalitou (příčinností) a svobodnou vůlí.

Nejstarší zprávou o tomto sporu je jediný dochovaný zlomek z díla řeckého filozofa Leukippa (5. st. př. n. l.): Ani jedna věc nevzniká bez příčiny, ale vše vzniká z nějakého důvodu (*logos*) a nutnosti (*ananké*). Původní význam slova ananké byla smyčka na krku otroka, tedy něco, co omezuje pohyb a svobodu. Ananké byla také řecká bohyně osudu a nutnosti. Její povaha byla velmi neměnná, a tak neměla mnoho chrámů, protože lidé se domnívali, že by si její přízeň takto nezískali.

Představa absolutní determinovanosti veškerého dění na světě ale byla těžko přijatelná (a je dodnes [31, 21]). To se pokouší řešit již řecký filozof Epikúros ze Samu (341–270 př. n. l.) tím, že zavádí *parenklizi*, malou odchylku od řádu nutnosti, kterou atomy projevují svoji svobodnou vůli.

Opět, a ve vyostřenější podobě, se otázka determinismu vynořuje po úspěších newtonovské mechaniky, kdy se zdálo, že Newtonův gravitační zákon spolu s Newtonovými pohybovými zákony umožňují vysvětlit pohyb planet naší sluneční soustavy. Francouzský matematik a astronom Pierre Laplace (1749–1827) přichází s představou bytosti (později nazvanou Laplaceův démon), která obdařena dokonalými výpočetními možnostmi a dokonalou znalostí počátečních podmínek (zde poloha a rychlost všech hmotných bodů v daném časovém okamžiku) by byla schopna určit stav systému v libovolném okamžiku v budoucnosti i v minulosti.

Fyzika počátku 20. století nám k otázce determinismu podala další důležité příspěvky: teorii relativity a kvantovou mechaniku. Albert Einstein (1879–1955) ve speciální teorii relativity ukázal, že pojem současnosti není absolutní, ale závisí na rychlosti pohybu pozorovatele. A v obecné teorii relativity ukázal, že Newtonův gravitační zákon, který přivedl Laplace k myšlence démona, platí jen přibližně. Dále dnes víme, že silové působení na dálku se neděje okamžitě, ale s určitým zpožděním, které z konečně dimenzionálního dynamického systému dělá nekonečně dimenzionání systém. Werner Karl Heisenberg (1901–1976) odvodil relace neurčitosti, které vylučují současnou přesnou znalost polohy a hybnosti (tedy rychlosti) částice.

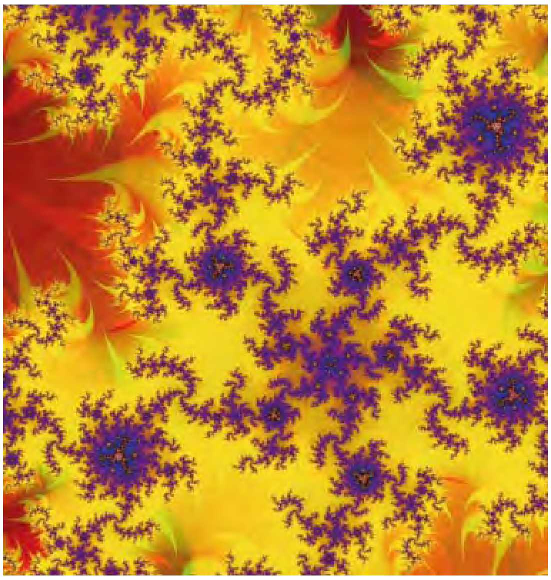
Podívejme se teď na otázku determinismu z jistého nadhledu. Především každý člověk má zkušenost své vlastní svobodné vůle. Tu nelze sice dokázat ani odvodit, ale tato vlastní zkušenost je silná.

Kromě jiného by bylo nepraktické svobodnou vůli vylučovat také proto, že by tím padal celý právní řád, na kterém stojí současná lidská civilizace. Protože jak by bylo možné trestat zloděje, kdybychom tvrdili, že tak jednal ne z vlastní vůle, ale podle deterministických zákonů, které řídí veškeré dění tohoto světa?

Jak je to tedy s platností fyzikálních zákonů? Platí, nebo neplatí? Je příroda deterministická, nebo ne? Je náš osud určen stavem vesmíru těsně po velkém třesku, nebo jsme my, lidé, svobodné bytosti?

Tyto otázky jsou výsledkem velkého nedorozumění. To spočívá v přeceňování fyziky a toho, co nazýváme přírodními zákony. Přírodní zákony totiž neplatí v absolutní míře.

Máme tři druhy zákonů: boží, právní a fyzikální. A žádné z těchto zákonů nepředstavují absolutní omezení. Boží zákony, aniž bychom zde řešili otázku, kdo je jejich autorem, představují velice dobrá doporučení. Např. nezabiješ, nepokradeš. Ale člověk má svobodu tato doporučení porušit s tím, že ponese následky svých činů. Podobně je to s právními zákony. Ale co fyzikální zákony? Když říkáme, že ani fyzikální zákony neplatí absolutně, nemáme tím na mysli, že by se člověk mohl např. rozhodnout, že se vznese a proletí se vzduchem,



sluneční soustavou či časem. Ani svobodná vůle člověka není absolutní.

Většina fyzikálních tvrzení je doprovázena velkým množstvím nevyslovených předpokladů. A deterministický chaos nám dává dobrou příležitost jeden důležitý nevyslovený předpoklad si připomenout. Je to přesnost. Nejen každý naměřený výsledek má svoji konečnou přesnost, ale i každý fyzikální zákon má svoji konečnou oblast platnosti. Dokonce i každý fyzikální pojem má svoji konečnou oblast, kde má smysl. Přesnost naměřeného výsledku je dána metodou měření, zejména měřicím přístrojem. Oblast platnosti fyzikálního zákona je obvykle tak široká, že ji není třeba v běžné praxi brát v úvahu. Nicméně přesnost tu hraje roli jakéhosi horizontu. Tak jako horizont v běžném slova smyslu je pomyslná čára kolem nás někde na blízkých pahorcích, která odděluje tu část krajiny, jež z našeho stanoviště vidíme, od té, kterou nevidíme, tak horizont daný přesností představuje hranici, kam až platí naše tvrzení.

Uvažujme např. Ohmův zákon $U = RI$.

Platí absolutně přesně? Nikoliv. Např. platí jen pro malé proudy I, protože při velkém proudu se uvolňovaným Joulovým teplem mohou zásadně změnit vlastnosti vodiče. Platí pro libovolně malé proudy? Nikoliv. Je-li např. elektrický proud v kovovém vodiči tvořen proudem elektronů o náboji e po dobu $t \approx 1$ s, pak nemá smysl uvažovat proud menší než

$$I_{\min} \approx \frac{e}{t} \doteq 1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{A}.$$

A tato hodnota představuje nejen minimální proud, který má smysl uvažovat, ale i přesnost, do jaké má smysl vůbec uvažovat elektrický proud po dobu jedné sekundy jako fyzikální veličinu. To je samozřejmě pro mnoho aplikací zcela dostačující přesnost. Tento horizont přesnosti začne být důležitý, potřebujeme-li uvažovat o přesném určení počátečních podmínek, např. pro předpovídání chování chaotického dynamického systému.

Nezapomínejme, že i samotný pojem elementární částice je pouze model – lidská myšlenková konstrukce, která velice dobře popisuje malou část světa v některých situacích. Stará otázka „Je elektron vlna, nebo částice?“ nemá odpověď ani vlna ani částice. Jak vlna, tak částice jsou jen lidské modely. Skutečnost je mnohem složitější a pouze na určitém stupni přesnosti (tedy do jistého horizontu) je rozumné používat tyto modely.

A jak to vypadá za horizontem? Můžeme si říci „za horizontem může být cokoliv“ (jako Homérův Odysseus) a nebo „co se naučím tady, to použiji i za horizontem“ (jako Kryštof Kolumbus).

Dějiny lidského poznání jsou neustálé posouvání horizontu směrem k větším přesnostem a neustálé objevování nových zákonitostí. Každý tento zákon a každý pojem, který se v něm vyskytuje, má svoji omezenou oblast platnosti a smyslu. Není důvod domnívat se, že to, co jsme objevili dodnes, bude platit i daleko za současným horizontem. Není ani důvod domnívat se, že současné nástroje pro popis skutečnosti (např. diferenciální a diferenční rovnice) budou stále tím nejlepším nástrojem.

Tím méně je důvod domnívat se, že někdy člověk objeví definitivní zákon veškerého dění na světě. Protože čím dál jdeme v tomto posouvání horizontu přesnosti, tím máme sice dokonalejší výpočetní i měřicí techniku, ale tím jsme také dále od naší běžné lidské zkušenosti.

A tak, jako jsme si vyvrátili pojem elektrického proudu coby fyzikální veličiny s absolutní platností, tak podobně můžeme u každé fyzikální veličiny najít omezenou oblast, kde má smysl ji uvažovat. Podobně například teplota a tlak, tak důležité veličiny pro stanovení současného stavu a tedy i pro předpovídání počasí, jsou pouze střední hodnoty souboru velkého počtu částic.

To však lze říci o všech fyzikálních veličinách, např. i času. Čas neexistuje v přírodě jako nějaká objektivní realita. Je to pouze lidská myšlenková konstrukce.

To nás vede k závěru, že fyzikální zákony jsou sice velice užitečné a i krásné, ale jsou to pouze lidské myšlenkové výtvory vhodné pro přibližný popis skutečnosti. Tento popis je často natolik blízký skutečnosti samé, že s ní bývá ztotožňován. Právě ta vysoká míra přesnosti je nebezpečná, protože vytváří toto pokušení.

Takže odpověď na otázku, je-li svět deterministický, či nikoliv, není ani ano ani ne. Odpověď zní: svět existuje, svět se vyvíjí, my jej pozorujeme, jsme součástí světa, jednotlivé části světa se navzájem ovlivňují. Člověk pozoruje dění kolem sebe (a i dění v sobě) a vytváří si modely – myšlenkové konstrukce, které jsou krásné a užitečné pro třídění těchto pozorování a pro částečné předpovídání dějů. Tyto modely mohou být deterministické nebo stochastické, ale jsou to jen přibližné modely.

Kde se lze dozvědět více?

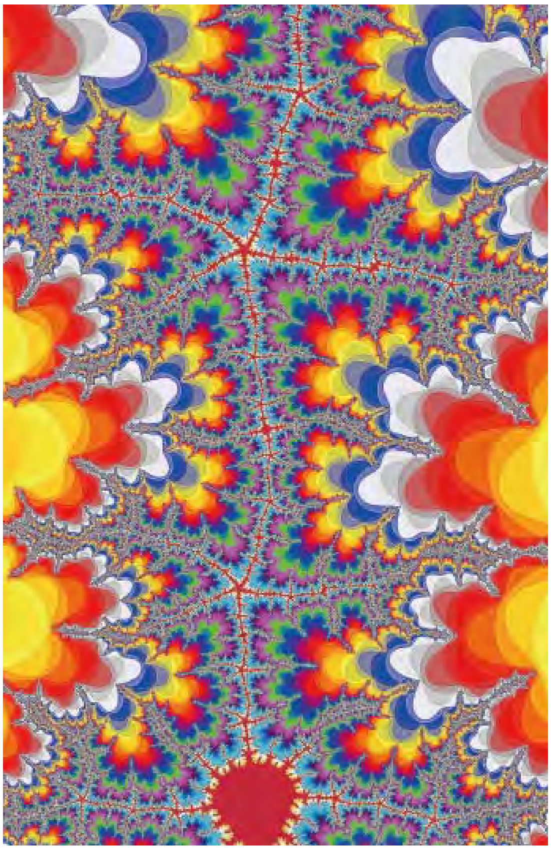
O chaosu bylo napsáno nepřeberné množství knih i článků v časopisech – jak odborných, tak populárních. Vyvážeností mezi srozumitelností a hloubkou se vyznačuje [22]. Vztahem mezi nelineární dynamikou a statistickou mechanikou se zabývá [8]. Zpracování experimentálních dat se věnuje [1, 14]. Populární pohled přináší [9]. Rozsahem citované literatury vyniká [18]. Většina prací je v angličtině, přesto i v češtině najdeme zajímavé práce [19, 13, 12, 15, 16].

Tento článek je shrnutím přednášek [26] a [27] a rozšířením příspěvku do sborníku [11] ze semináře Matematika na vysokých školách.

Vedle papírových pramenů dnes existuje bohatá literatura v elektronické podobě. Občas to jsou díla rozsahem a hloubkou plně srovnatelná s papírovými, např. [5]. Často to jsou však krátké texty mající různou úroveň. Díky vyhledávacím nástrojům jako Google [10] v nich lze snadno hledat. Mezi užitečné zdroje informací rozhodně patří *UK Nonlinear News* (Nelineární

» *...fyzikální zákony jsou sice velice užitečné a i krásné, ale jsou to pouze lidské myšlenkové výtvory vhodné pro přibližný popis skutečnosti.* «

» ...nezastupitelnou úlohu při studiu deterministického chaosu hraje vlastní prožitek. «



zprávy Spojeného království) [29] a *Nonlinear Science FAQ* (*Frequently Asked Questions* – Často kladené otázky) [20]. Archiv *arXiv* [3] založený v roce 1991 v Los Alamos National Laboratory původně pro články z fyziky vysokých energií, který v roce 2001 přešel do správy Cornell University, dnes obsahuje plné texty publikací z fyziky, matematiky, nelinárních věd, počítačových věd a kvantitativní biologie a představuje rychlý a pohodlný způsob pro sdílení nových matematických a fyzikálních výsledků.

Užitečným zdrojem odborných informací je Wikipedie – otevřená encyklopedie [30]. Otevřená zde znamená, že každý uživatel může kdykoliv a zadarmo číst její obsah, ale také, že každý může její obsah opravovat, upravovat a přispívat. Tím je dosaženo, že jejími spoluautory se mohou stát všichni gramotní obyvatelé této planety a společně tak vytvořit dílo nebývalého rozsahu a významu.

Co říci závěrem?

Číst literaturu, papírovou či elektronickou, je užitečné, ale podle mé osobní zkušenosti nezastupitelnou úlohu při studiu deterministického chaosu hraje vlastní prožitek. Je velice důležité zvolit si nějaký nelineární model, např. logistické zobrazení nebo Lorenzův model, vybrat si nějaký softwarový nástroj (nějaký programovací jazyk, např. C, Fortran, Pascal nebo ještě lépe nějaký vyšší prostředek, např. Mathematica, Maple, Matlab) a hrát si. Volit si různé počáteční podmínky, různé hodnoty parametrů a iterovat, integrovat, simulovat, kontinuovat a kreslit si obrázky a v klidu se na ně dlouze dívat. Je to inspirující a krásné. Přeji vám, milí čtenáři, hodně takových krásných zážitků s deterministickým chaosem.

Tato práce je podporována projektem MSM 6046137306 a vznikla díky přístupu k výpočetním zdrojům META-Centrum v rámci MSM 6383917201.

Literatura

[1] H. D. I. Abarbanel: *Analysis of Observed Chaotic Data*. Springer-Verlag 1996.

[2] J. Andres: „Šarkovského věta a diferenciální rovnice“, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **49**, 151 (2004).

[3] Archiv článků arXiv: http://arXiv.org, původně http://xxx.lanl.gov.

[4] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stachy: „On Devaney's definition of chaos“, Amer. Math. Monthly **99**, 332 (1992).

[5] P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner, G. Vattay: *Chaos: Classical and Quantum*; http:// www.Chaos-Book.org (Niels Bohr Institute, Copenhagen 2005).

[6] R. Devaney: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, New York 1989.

[7] M. C. Escher: http://www.mcescher.com.

[8] P. Gaspard: *Chaos, Scattering and Statistical Mechanics*. Cambridge University Press 1998.

[9] J. Gleick: *Chaos, vznik nové vědy*. Ando Publ., Praha 1996.

[10] Vyhledávač Google. http://www.google.com.

[11] L. Herrmann (Ed.): „Matematika na vysokých školách“. *Sborník semináře Determinismus a chaos*. Herbertov 5. – 7. 9. 2005.

[12] M. Holodniok, A. Klíč, M. Kubíček, M. Marek: *Metody analýzy nelineárních dynamických modelů*. Academia, Praha 1986.

[13] J. Horák, L. Krlín, A. Raidl: *Deterministický chaos a jeho fyzikální aplikace*. Academia, Praha 2003.

[14] H. Kantz, T. Schreiber: *Nonlinear time series analysis*. Cambridge University Press 1997.

[15] P. Kůrka: *Chaotická dynamika*. MFF UK Praha 1993; http://ktiml.ms.mff.cuni.cz/~kurka/.

[16] V. Kůrková: „Fraktální geometrie“, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **34**, 267 (1989).

[17] T. Y. Li, J. Yorke: „Period three implies chaos“, Amer. Math. Monthly **82**, 985 (1975).

[18] M. Marek, I. Schreiber: *Chaotic Behaviour of Deterministic Dissipative Systems*. Academia, Praha 1991.

[19] M. Marek, I. Schreiber: *Stochastické chování deterministických systémů*. Academia, Praha 1984.

[20] J. Meiss (Ed.): *Nonlinear Science Frequently Asked Questions*; http://www.faqs.org/faqs/sci/nonlinear-faq. SIAM Dynamical Systems Web: http://www.dynamicalsystems.org.

[21] J. Nosek (Ed.): *Chaos, věda a filosofie*. FILOSOFIA, nakl. Filosofického ústavu AVČR, Praha 1999.

[22] E. Ott: *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press 2002.

[23] *Ottův slovník naučný*. J. Otto, Praha 1897.

[24] P. Pokorný, M. Marek: „Origin and dimension of strange nonchaotic attractors“, v: *Chaos and Nonlinear Mechanics* (Eds.: T. Kapitaniak, J. Brindley). World Scientific Series on Nonlinear Science B, **4** (1994).

[25] P. Pokorný, I. Schreiber, M. Marek: „On the route to strangeness without chaos in the quasiperiodically forced van der Pol oscillator“, Chaos, Solitons and Fractals **7**, 409 (1996).

[26] P. Pokorný: *Chaos je krásný*. Zvaná přednáška na KMOP MFF UK Praha, 21. 5. 2002.

[27] P. Pokorný: *Deterministický chaos a matematické, fyzikální a filozofické souvislosti*. Zvaná přednáška JČMF, MFF UK Praha, 19. 5. 2004.

[28] A. N. Šarkovskij: „Sosuščestvovanije ciklov nepreryvnogo otobraženija v sebja“, Ukrain. Matem. Žurn. **1**, 61 (1964).

[29] UK Nonlinear News; http://www.maths.leeds.ac.uk/Applied/news.dir.

[30] Wikipedia: http://www.wikipedia.org.

[31] P. Zamarovský: *Svobodná vůle, determinismus a fyzika*. FEL ČVUT v Praze, 2000; http://howadoor.wz.cz/determinismus.pdf.