Evropský sociální fond
Praha & EU: investujeme do vaší budoucnosti

E-sbírka příkladů
Seminář z matematiky

Daniel Turzík, Miroslava Dubcová,
Pavla Pavlíková

Obsah

Řešení:

1. Úpravy výrazů

1.1. Zlomky

V nsledujcch pkladech upravte zlomky:

Příklad 1.1: $$\frac{\frac{3}{5}+\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}-\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{11}\right).$$ *Řešení*

Příklad 1.2: $$\left(\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}-\frac{1}{3}}-\frac{5}{2}\right):\left(\frac{10}{3}-\frac{5}{6}\right).$$ *Řešení*

Příklad 1.3: $$\left(\frac{a}{3}+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{3\,a}{2}+\left(\frac{2}{a}-\frac{a}{4}\right)\cdot 2\,a\,;\quad a\neq 0\,.$$ *Řešení*

Příklad 1.4: $$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{1}{3\,a}-\frac{b}{3}\right)\cdot\left(\frac{b}{3}-\frac{b}{2}\right)\;;\quad a,\,b\neq 0,\;a\,b\neq 1\,.$$ *Řešení*

1.2. Mocniny a odmocniny

V nsledujcch pkladech zjednodute vraz:

Příklad 1.5: $$\frac{x^2\,y^3}{2^8\,y^5\,x}\,4^3\,;\;\; x,\,y\neq 0\,.$$ *Řešení*

Příklad 1.6: $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\, b^{\frac{15}{9}}}{a^{\frac{1}{6}}\, b^{\frac{3}{2}}}\,; \quad a,\, b > 0\,.$ *Řešení*

Příklad 1.7: $\dfrac{\left(\dfrac{u^2\, v}{w^2}\right)^5}{v^6\left(\dfrac{u^3}{w^3\, v}\right)^3}\,; \quad u,\, v,\, w \neq 0\,.$ *Řešení*

1.3. Mnoholeny

V nsledujcch pkladech vydlte polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ a provete zkouku:

Příklad 1.8: $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4,\;\; Q(x) = x - 2\,,$ *Řešení*

Příklad 1.9: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 6x + 3,\;\; Q(x) = x^2 - 3\,,$ *Řešení*

Příklad 1.10: $P(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 9x - 7,\;\; Q(x) = x + 5\,,$ *Řešení*

Příklad 1.11: $P(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + 18x^2 - 13x + 3,\;\; Q(x) = x^2 - 3x + 4\,,$ *Řešení*

Příklad 1.12: Umocnte dvojleny:

a) $(3\,x - 2)^4\,,$ **b)** $(a\,b - 2)^3\,,$ **c)** $\left(2\,z - \dfrac{1}{z}\right)^5,$ **d)** $\left(\dfrac{u}{v} + \dfrac{2\,v}{u}\right)^3.$ *Řešení*

Příklad 1.13: Rozlote mnoholeny na souin:

a) $\dfrac{x^2}{25} - 25\,y^2\,,$ **b)** $a^4 - 16\,,$ **c)** $x^3 - 3\,\sqrt{3}\,,$ **d)** $8\,u^3 + \dfrac{v^3}{27}\,.$ *Řešení*

Příklad 1.14: Rozlote trojleny na souin:
a) $x^2 - 5\,x - 24\,,$ **b)** $3\,x^2 + 21\,x + 30\,,$ **c)** $x^4 - 5\,x^2 + 4\,,$ **d)** $x^4 - 8\,x^2 - 9\,.$ *Řešení*

Příklad 1.15: Doplte na tverec.
a) $x^2 + 2\,x - 4\,,$ **b)** $2\,x^2 - 8\,x + 9\,,$ **c)** $x^2 - \frac{4}{3}\,x + 1\,,$ **d)** $x^4 - 6\,x^2 + 1\,.$ *Řešení*

1.4. Lomen algebraick vrazy

Příklad 1.16: Sette lomen vrazy:

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{a(b-a)} + \frac{2}{a^2-b^2}\,.$$

Řešení

Příklad 1.17: Sette lomen vrazy:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{(-1)}{x+1} + \frac{(-2)}{x^2+1}\,.$$

Řešení

Příklad 1.18: Zjednodute lomen vraz:

$$\frac{\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}}\,.$$

Řešení

Příklad 1.19: Zjednodute lomen vraz:

$$\frac{\dfrac{4\,u}{u-1}-\dfrac{1}{u(u-1)}}{\dfrac{4\,u-1}{u-1}+\dfrac{1}{u}}\,.$$

Řešení

1.5. prava vrazů

V nsledujcch pkladech upravte vraz a stanovte podmnky, za kterch m vraz smysl:

Příklad 1.20:

$$\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}-x}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}\right)\,.$$

Řešení

Příklad 1.21:

$$\frac{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}}\,.$$

Řešení

Příklad 1.22:

$$\frac{\dfrac{y+1}{x-1}-\dfrac{y-1}{x+1}}{\dfrac{y}{x-1}-\dfrac{y}{x+1}}\,.$$

Řešení

2. Řešení rovnic

2.1. Algebraické rovnice o jedné neznámé

Příklad 2.1: Řešme v reálném oboru rovnici $4x - 2(1 - x) - 3(x + 2) = 6x - 8.$ *Řešení*

Příklad 2.2: Řešme v reálném oboru rovnici $4x - 2(1 - x) - 3(x + 2) = 6x - 9.$ *Řešení*

Příklad 2.3: Řešme v reálném oboru rovnici $4x - 2(1 + x) - 3(x + 2) = 8 - x.$ *Řešení*

Příklad 2.4: Řešme v reálném oboru rovnici $4x - 2(1 - x) - 3(x + 2) + 8 - 3x = 0.$ *Řešení*

Příklad 2.5: Řešme v reálném oboru rovnici

$$\frac{3x + 8}{16 - x^2} = \frac{5}{2(4 - x)} - \frac{1}{2(x + 4)}.$$

Řešení

Příklad 2.6: Provedeme diskusi řešitelnosti rovnice (s neznámou x)

$$\frac{t^2 - 1}{x} = t - 1$$

vzhledem k reálnému parametru t. *Řešení*

Příklad 2.7: Řešme kvadratické rovnice:

a) $x^2 - 2x - 15 = 0,$ **b)** $-x^2 + 5x - 8 = 0,$ **c)** $x^2 + 14x + 49 = 0.$ *Řešení*

Příklad 2.8: Řešme v reálném oboru rovnici $2x^3 - 9x^2 + 4x + 15 = 0.$ *Řešení*

Příklad 2.9: Řešme v oboru komplexních čísel rovnici $x^3 - 7x^2 + x - 7 = 0.$ *Řešení*

Příklad 2.10: Řešme v reálném oboru rovnici $4 + \sqrt{x^2 - 16} = x$. *Řešení*

Příklad 2.11: Řešme v reálném oboru rovnici $1 + \sqrt{x} = \sqrt{x + 3}$. *Řešení*

Příklad 2.12: Řešme v reálném oboru rovnici $\sqrt{x^2 + 8} = x - 2\sqrt{2}$. *Řešení*

2.2. Jednoduché exponenciální a logaritmické rovnice

Příklad 2.13: Řešme v reálném oboru rovnici $4^{x-1} = 5^{2-2x}$. *Řešení*

Příklad 2.14: Řešme v reálném oboru rovnici $5^{x+1} - 4 \cdot 5^x = 5 \cdot 5^{x-1}$. *Řešení*

Příklad 2.15: Řešme v reálném oboru rovnici $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x-1} = 5 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{x+1} + 22$. *Řešení*

Příklad 2.16: Řešme v reálném oboru rovnici $\ln x + \ln(x + 9) = 4 \ln 2 + \ln 7$. *Řešení*

2.3. Jednoduché goniometrické rovnice

Příklad 2.17: Řešme v reálném oboru rovnici $\operatorname{cotg} x = -\sqrt{3}$. *Řešení*

Příklad 2.18: Řešme v reálném oboru rovnici $\cos(2x - \frac{\pi}{2}) = -1$. *Řešení*

Příklad 2.19: Řešme v reálném oboru rovnici $2 \sin^2 x = 5 \cos x + 5$. *Řešení*

2.4. Rovnice s absolutní hodnotou

Příklad 2.20: Řešme v reálném oboru rovnici $|4x - 1| = 2 + 3x$. *Řešení*

Příklad 2.21: Řešme v reálném oboru rovnici $|4x - 8| + 3|x| = x + 1$. *Řešení*

Příklad 2.22: Řešme v reálném oboru rovnici $|4x - 8| - 3|x| = x + 1$. *Řešení*

2.5. Soustavy rovnic

Příklad 2.23: Řešme v reálném oboru soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcl} 5x & + & 2y & = & -3 \\ x & - & 6y & = & -39. \end{array}$$

Řešení

Příklad 2.24: Řešme v reálném oboru soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcl} 7x & + & 3y & = & -5 \\ -2x & + & y & = & -6. \end{array}$$

Řešení

3. Řešení nerovnic

3.1. Lineární nerovnice a jejich soustavy

Příklad 3.1: Řešme v $\mathbb{R}$ nerovnici $4(2-x)-3(x-1)+2x-9 \le 5x-8.$ *Řešení*

Příklad 3.2: Řešme v $\mathbb{R}$ nerovnici $(4x-1)^2+2(1-x)-2(x+1) < 4(2x+3)^2.$ *Řešení*

Příklad 3.3: Řešme v $\mathbb{R}$ soustavu nerovnic *Řešení*

$$\begin{aligned} 2-3x &< 0 \\ 4x+8 &\ge 0. \end{aligned}$$

3.2. Nerovnice s absolutní hodnotou

Příklad 3.4: Řešme v reálném oboru nerovnici $|2x-4| \le 8.$ *Řešení*

Příklad 3.5: Řešme v reálném oboru nerovnici $|1-4x| \le 5.$ *Řešení*

Příklad 3.6: Řešme v reálném oboru nerovnici $|x|+|2-x|-2|x+1| \ge 5.$ *Řešení*

Příklad 3.7: Řešme v reálném oboru soustavu nerovnic *Řešení*

$$\begin{aligned} |x+3| &\ge 1 \\ |1+x| &\le 3. \end{aligned}$$

3.3. Nerovnice součinového a podílového typu

Příklad 3.8: Řešme v reálném oboru nerovnici $(8-x)(2x+1) \ge 0.$ *Řešení*

Příklad 3.9: Řešme v reálném oboru nerovnici $(3x-4)(x+7) < 0.$ *Řešení*

Příklad 3.10: Řešme v reálném oboru nerovnici $\dfrac{x-4}{3+x} \leq 2.$ *Řešení*

Příklad 3.11: Řešme v reálném oboru nerovnici $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-10x+21} \geq 0.$ *Řešení*

3.4. Kvadratické nerovnice

Příklad 3.12: Řešme v reálném oboru nerovnici $-6x^2+7x-2 \geq 0.$ *Řešení*

Příklad 3.13: Řešme v reálném oboru nerovnici $-3x^2+15x-12 > 0.$ *Řešení*

3.5. Nerovnice s neznámou pod odmocninou

Příklad 3.14: Řešme v reálném oboru nerovnici $\sqrt{-2x^2-3x+14} \geq -1.$ *Řešení*

Příklad 3.15: Řešme v reálném oboru soustavu nerovnic $-1 \leq \frac{1}{2} - \sqrt{x} \leq 1.$ *Řešení*

3.6. Jednoduché exponenciální nerovnice

Příklad 3.16: Řešme v reálném oboru nerovnici $4^{x-2} \geq 2.$ *Řešení*

Příklad 3.17: Řešme v reálném oboru nerovnici $3^{1-x} < 4.$ *Řešení*

3.7. Jednoduché logaritmické nerovnice

Příklad 3.18: Řešme v reálném oboru nerovnici $\ln(2-x) \geq 1.$ *Řešení*

Příklad 3.19: Řešme v reálném oboru nerovnici $\log_{\frac{1}{5}}(2x-1) < 0.$ *Řešení*

3.8. Jednoduché goniometrické nerovnice

Příklad 3.20: Řešme v reálném oboru nerovnici $\cos x < \frac{1}{2}$. *Řešení*

4. Komplexní čísla

4.1. Operace s komplexními čísly

Příklad 4.1: Vyjádřete v algebraickém tvaru:

a) $(5+4\,\mathrm{i}\,)+(2-3\,\mathrm{i}\,)$, **b)** $(2+5\,\mathrm{i}\,)(-3+8\,\mathrm{i}\,)$, **c)** $(2-5\,\mathrm{i}\,)^2$,

d) $(2+3\,\mathrm{i}\,)^2-(4+9\,\mathrm{i}\,)$, **e)** $4(5+3\,\mathrm{i}\,)(2\,\mathrm{i}\,)$, **f)** $(1-\mathrm{i}\,)(1+\mathrm{i}\,)(3+4\,\mathrm{i}\,)$. *Řešení*

Příklad 4.2: Vyjádřete v algebraickém tvaru:

a) $\dfrac{2-3\,\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$, **b)** $\dfrac{3+5\,\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, **c)** $\dfrac{4+\mathrm{i}}{1+2\,\mathrm{i}}(2+3\,\mathrm{i}\,)$,

d) $\dfrac{(5+3\,\mathrm{i}\,)(3+4\,\mathrm{i}\,)}{1+\mathrm{i}}$, **e)** $\dfrac{(7+3\,\mathrm{i}\,)(6+2\,\mathrm{i}\,)}{(2+5\,\mathrm{i}\,)(2-6\,\mathrm{i}\,)}$, **f)** $\dfrac{(4-6\,\mathrm{i}\,)(9-6\,\mathrm{i}\,)}{(-9+3\,\mathrm{i}\,)(-5+3\,\mathrm{i}\,)}(6-7\,\mathrm{i}\,)$. *Řešení*

4.2. Goniometrický tvar komplexního čísla

Příklad 4.3: Komplexní číslo $2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12}+\mathrm{i}\,\sin\frac{7\pi}{12})$ vyjádřete v algebraickém tvaru. *Řešení*

Příklad 4.4: Komplexní číslo $z=-8+8\,\mathrm{i}$ vyjádřete v goniometrickém tvaru. *Řešení*

Příklad 4.5: Komplexní číslo $z=-\sqrt{3}-3\,\mathrm{i}$ vyjádřete v goniometrickém tvaru. *Řešení*

Příklad 4.6: Komplexní číslo $z=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\mathrm{i}$ vyjádřete v goniometrickém tvaru. *Řešení*

Příklad 4.7: Vyjádřete komplexní číslo $(\cos\frac{3}{7}\pi+\mathrm{i}\,\sin\frac{3}{7}\pi)(\cos\frac{4}{7}\pi+\mathrm{i}\,\sin\frac{4}{7}\pi)$ v algebraickém tvaru. *Řešení*

Příklad 4.8: Vyjádřete komplexní číslo $(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12})(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})$ v algebraickém tvaru. *Řešení*

Příklad 4.9: Vyjádřete komplexní číslo $(\cos\frac{\pi}{15} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{15})^{35}$ v algebraickém tvaru. *Řešení*

Příklad 4.10: Vyjádřete komplexní číslo $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^7$ v algebraickém tvaru. *Řešení*

Příklad 4.11: Najděte všechny odmocniny $\sqrt{-5-5\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$. *Řešení*

R1. Úpravy výrazů - řešení

R1.1. Zlomky - řešení

Příklad 1.1:
$$\frac{\frac{3}{5}+\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}-\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{11}\right)=\frac{\frac{11}{10}}{\frac{1}{15}}\cdot\frac{52}{33}=\frac{33}{2}\cdot\frac{52}{33}=26\,.$$

Příklad 1.2:
$$\left(\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}-\frac{1}{3}}-\frac{5}{2}\right):\left(\frac{10}{3}-\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{24}}-\frac{5}{2}\right):\frac{5}{2}=\left(16-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{2}{5}=\frac{27}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{27}{5}\,.$$

Příklad 1.3:
$$\left(\frac{a}{3}+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{3\,a}{2}+\left(\frac{2}{a}-\frac{a}{4}\right)\cdot 2\,a=\left(\frac{a^2+3}{3\,a}\right)\cdot\frac{3\,a}{2}+\left(\frac{8-a^2}{4\,a}\right)\cdot 2\,a$$
$$=\left(\frac{a^2+3}{2}\right)+\left(\frac{8-a^2}{2}\right)=\frac{11}{2}\,.$$

Příklad 1.4:
$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{1}{3\,a}-\frac{b}{3}\right)\cdot\left(\frac{b}{3}-\frac{b}{2}\right)=\frac{a^2+b^2}{a\,b}:\frac{1-a\,b}{3\,a}\cdot\frac{2\,b-3\,b}{6}=$$
$$=\frac{a^2+b^2}{a\,b}\cdot\frac{3\,a}{1-a\,b}\cdot\frac{-b}{6}=\frac{a^2+b^2}{2(a\,b-1)}\,.$$

R1.2. Mocniny a odmocniny - řešení

Příklad 1.5: $$\frac{x^2\,y^3}{2^8\,y^5\,x}\,4^3=\frac{x^2\,y^3}{2^8\,y^5\,x}\,2^6=x^{2-1}\,y^{3-5}\,2^{6-8}=x\,y^{-2}\,2^{-2}=\frac{x}{4\,y^2}\,.$$

Příklad 1.6: $$\frac{a^{\frac{2}{3}}\,b^{\frac{15}{9}}}{a^{\frac{1}{6}}\,b^{\frac{3}{2}}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}\,b^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}\,b^{\frac{3}{2}}}=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}\,b^{\frac{5}{3}-\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{6}}\,b^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{6}}\,.$$

Příklad 1.7: $$\frac{\left(\dfrac{u^2\,v}{w^2}\right)^5}{v^6\left(\dfrac{u^3}{w^3\,v}\right)^3}=\frac{\dfrac{u^{10}\,v^5}{w^{10}}}{v^6\,\dfrac{u^9}{w^9\,v^3}}=\frac{u^{10}\,v^5}{w^{10}}\cdot\frac{w^9\,v^3}{v^6\,u^9}=\frac{u\,v^2}{w}\,.$$

R1.3. Mnohočleny - řešení

Příklad 1.8:

$$\begin{array}{rrrrl}
(x^3 & -5\,x^2 & +8\,x & -4) & :\,(x-2)=x^2\ -3\,x\ +2\\
-(x^3 & -2\,x^2) & & & \\
\hline
 & -3\,x^2 & +8\,x & -4 & \\
 & -(3\,x^2 & +6\,x) & & \\
\hline
 & & 2\,x & -4 & \\
 & & -(2\,x & -4) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

Výsledek: $P(x):Q(x)\ =\ x^2-3\,x+2$, pro $x\neq 2$.

Zkouška: $(x^2-3\,x+2)\cdot(x-2)\ =\ x^3-3\,x^2+2\,x-2\,x^2+6\,x-4\ =\ x^3-5\,x^2+8\,x-4\,.$

Příklad 1.9:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(x^4 & +2\,x^3 & -4\,x^2 & -2\,x & +3) & : (x^2-3) = x^2 \; +2\,x \; -1 \\
-(x^4 & & -3\,x^2) & & & \\
\hline
& 2\,x^3 & -x^2 & -6\,x & +3 & \\
& -(2\,x^3 & & -6\,x) & & \\
\hline
& & -x^2 & & +3 & \\
& & -(-x^2 & & +3) & \\
\hline
& & & & 0 &
\end{array}
$$

Výsledek: $P(x) : Q(x) \; = \; x^2 + 2\,x - 1$, pro $x \neq \pm\sqrt{3}$.

Zkouška: $(x^2 + 2\,x - 1) \cdot (x^2 - 3) \; = \; x^4 + 2\,x^3 - x^2 - 3\,x^2 - 6\,x + 3 \; = \; x^4 + 2\,x^3 - 4\,x^2 - 6\,x + 3$.

Příklad 1.10:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(x^4 & +6\,x^3 & +7\,x^2 & +9\,x & -7) & : (x+5) = x^3 + x^2 + 2\,x - 1 \\
-(x^4 & +5\,x^3) & & & & \\
\hline
 & x^3 & +7\,x^2 & +9\,x & -7 & \\
 & -(x^3 & +5\,x^2) & & & \\
\hline
 & & 2\,x^2 & +9\,x & -7 & \\
 & & -(2\,x^2 & +10\,x) & & \\
\hline
 & & & -x & -7 & \\
 & & & -(-x & -7) & \\
\hline
 & & & & -2 &
\end{array}
$$

Zbytek po dělení je -2.

Výsledek: $P(x) : Q(x) = x^3 + x^2 + 2\,x - 1 - \dfrac{2}{x+5}$, pro $x \neq -5$.

Zkouška:

$$\left(x^3 + x^2 + 2\,x - 1 - \frac{2}{x+5}\right) \cdot (x+5) =$$

$$= (x^3 + x^2 + 2\,x - 1) \cdot (x+5) - \frac{2}{x+5} \cdot (x+5) =$$

$$= x^4 + x^3 + 2\,x^2 - x + 5\,x^3 + 5\,x^2 + 10\,x - 5 - 2 =$$

$$= x^4 + 6\,x^3 + 7\,x^2 + 9\,x - 7.$$

Příklad 1.11:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
(x^5 & -x^4 & -5\,x^3 & +18\,x^2 & -13\,x & +3\ ) & : (x^2 \ -3\,x \ +4) = x^3 \ +2\,x^2 \ -3\,x \ +1 \\
-(x^5 & -3\,x^4 & +4\,x^3) & & & & \\
\hline
 & 2\,x^4 & -9\,x^3 & +18\,x^2 & -13\,x & +3 & \\
 & -(2\,x^4 & -6\,x^3 & +8\,x^2) & & & \\
\hline
 & & -3\,x^3 & +10\,x^2 & -13\,x & +3 & \\
 & & -(-3\,x^3 & +9\,x^2 & -12\,x) & & \\
\hline
 & & & x^2 & -x & +3 & \\
 & & & -(x^2 & -3\,x & +4) & \\
\hline
 & & & & 2\,x & -1 &
\end{array}
$$

Zbytek po dělení je $6\,x - 2$.

Výsledek: $P(x) : Q(x) = x^3 + 2\,x^2 - 3\,x + 1 + \dfrac{2\,x - 1}{x^2 - 3\,x + 4}$.

Zkouška:

$$
\left(x^3 + 2\,x^2 - 3\,x + 1 + \frac{2\,x - 1}{x^2 - 3\,x + 4} \right) \cdot (x^2 - 3\,x + 4) \ =
$$

$$
= \ (x^3 + 2\,x^2 - 3\,x + 1) \cdot (x^2 - 3\,x + 4) + \frac{2\,x - 1}{x^2 - 3\,x + 4} \cdot (x^2 - 3\,x + 4) \ =
$$

$$
= \ x^5 - 3\,x^4 + 4\,x^3 + 2\,x^4 - 6\,x^3 + 8\,x^2 - 3\,x^3 + 9\,x^2 - 12\,x + x^2 - 3\,x + 4 + 2\,x - 1 \ =
$$

$$
= \ x^5 - x^4 - 5\,x^3 + 18\,x^2 - 13\,x + 3.
$$

Příklad 1.12: a) $(3\,x-2)^4 = 81\,x^4+\binom{4}{1}\cdot 27\,x^3\cdot(-2)+\binom{4}{2}\cdot 9\,x^2\cdot(-2)^2+\binom{4}{3}\cdot 3\,x(-2)^3+(-2)^4 =$

$= 81\,x^4 - 216\,x^3 + 216\,x^2 - 96\,x + 16\,.$

b) $(a\,b-2)^3 = a^3b^3 + \binom{3}{1}\cdot a^2b^2\cdot(-2) + \binom{3}{2}\cdot a\,b\cdot(-2)^2 + (-2)^3 =$

$= a^3b^3 - 6\,a^2b^2 + 12\,a\,b - 8\,.$

c) $\left(2\,z-\frac{1}{z}\right)^5 = 32\,z^5 + \binom{5}{1}\cdot 16\,z^4\cdot\left(-\frac{1}{z}\right) + \binom{5}{2}\cdot 8\,z^3\cdot\left(-\frac{1}{z}\right)^2 + \binom{5}{3}\cdot 4\,z^2\cdot$

$\left(-\frac{1}{z}\right)^3 + \binom{5}{4}\cdot 2\,z\cdot\left(-\frac{1}{z}\right)^4 + \left(-\frac{1}{z}\right)^5 =$

$= 32\,z^5 - 80\,z^3 + 80\,z - 40\frac{1}{z} + 10\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5}\,.$

d) $\left(\frac{u}{v}+\frac{2\,v}{u}\right)^3 = \frac{u^3}{v^3} + \binom{3}{1}\cdot\frac{u^2}{v^2}\cdot\frac{2\,v}{u} + \binom{3}{2}\cdot\frac{u}{v}\cdot\frac{4\,v^2}{u^2} + \frac{8\,v^3}{u^3} =$

$= \frac{u^3}{v^3} + 6\,\frac{u}{v} + 12\,\frac{v}{u} + 8\,\frac{v^3}{u^3}\,.$

Příklad 1.13: a) $\dfrac{x^2}{25} - 25\,y^2 \;=\; \dfrac{x^2}{5^2} - 5^2\,y^2 \;=\; \left(\dfrac{x}{5} - 5\,y\right)\left(\dfrac{x}{5} + 5\,y\right).$

b) $a^4 - 16 \;=\; (a^4 - 2^4) \;=\; (a^2 - 2^2)(a^2 + 2^2) \;=\; (a-2)(a+2)(a^2+4)\,.$

c) $x^3 - 3\,\sqrt{3} \;=\; (x^3 - (\sqrt{3})^3) \;=\; (x - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3}\,x + (\sqrt{3})^2) \;=$
$= \;(x - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3}\,x + 3)\,.$

d) $8\,u^3 + \dfrac{v^3}{27} \;=\; \left(2^3\,u^3 + \dfrac{v^3}{3^3}\right) \;=\; \left(2\,u + \dfrac{v}{3}\right)\left(2^2\,u^2 - 2\,u\,\dfrac{v}{3} + \dfrac{v^2}{3^2}\right) \;=$

$= \;\left(2\,u + \dfrac{v}{3}\right)\left(4\,u^2 - \dfrac{2}{3}\,u\,v + \dfrac{v^2}{9}\right).$

Příklad 1.14: a) Najdeme kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 5\,x - 24 \;=\; 0\,.$

$$x_{1,2} \;=\; \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{2} \;=\; \frac{5 \pm \sqrt{121}}{2} \;=\; \frac{5 \pm 11}{2} \;=\; \begin{array}{l} \nearrow \;\; x_1 = 8 \\ \searrow \;\; x_2 = -3 \end{array}\,.$$

$$x^2 - 5\,x - 24 \;=\; (x-8)(x+3)\,.$$

b) $3\,x^2 + 21\,x + 30 \;=\; 3(x^2 + 7\,x + 10).$
Najdeme kořeny kvadratické rovnice $x^2 + 7\,x + 10 \;=\; 0\,.$

$$x_{1,2} \;=\; \frac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{2} \;=\; \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2} \;=\; \frac{-7 \pm 3}{2} \;=\; \begin{array}{l} \nearrow \;\; x_1 = -5 \\ \searrow \;\; x_2 = -2 \end{array}\,.$$

$$3\,x^2 + 21\,x + 30 \;=\; 3(x^2 + 7\,x + 10) \;=\; 3(x+2)(x+5)\,.$$

c) Provedeme substituci $y = x^2$, $x^4 - 5\,x^2 + 4 \;=\; y^2 - 5\,y + 4\,.$
Najdeme kořeny kvadratické rovnice $y^2 - 5\,y + 4 \;=\; 0\,.$

$$y_{1,2} \;=\; \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \;=\; \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \;=\; \frac{5 \pm 3}{2} \;=\; \begin{array}{l} \nearrow \;\; y_1 = 4 \\ \searrow \;\; y_2 = 1 \end{array}\,.$$

$$x^4 - 5\,x^2 + 4 \;=\; y^2 - 5\,y + 4 \;=\; (y-4)(y-1) \;=\; (x^2-4)(x^2-1) \;=\; (x-1)(x+2)(x-1)(x+1)\,.$$

d) Provedeme substituci $y = x^2$, $x^4 - 8\,x^2 - 9 \;=\; y^2 - 8\,y - 9\,.$
Najdeme kořeny kvadratické rovnice $y^2 - 8\,y - 9 \;=\; 0\,.$

$$y_{1,2} \;=\; \frac{8 \pm \sqrt{64-36}}{2} \;=\; \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2} \;=\; \frac{8 \pm 10}{2} \;=\; \begin{array}{l} \nearrow \;\; y_1 = 9 \\ \searrow \;\; y_2 = -1 \end{array}\,.$$

$x^4 - 8x^2 - 9 = y^2 - 8y - 9 = (y-9)(y+1) = (x^2-9)(x^2+1) = (x-3)(x+3)(x^2+1)\,.$

Příklad 1.15: a) $x^2 + 2x - 4 = (x^2 + 2x + 1) - 1 - 4 = (x+1)^2 - 5\,,$

b) $2x^2 - 8x + 9 = 2(x^2 - 4x) + 9 = 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 9 =$
$= 2(x^2 - 4x + 4) - 8 + 9 = 2(x-2)^2 + 1\,,$

c) $x^2 - \dfrac{4}{3}x + 1 = \left(x^2 - \dfrac{4}{3}x + \dfrac{4}{9}\right) - \dfrac{4}{9} + 1 = \left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2 + \dfrac{5}{9}\,,$

d) $x^4 - 6x^2 + 1 = (x^4 - 6x^2 + 9) - 9 + 1 = (x^2 - 3)^2 - 8\,.$

R1.4. Lomené algebraické výrazy - řešení

Příklad 1.16: Lomené výrazy mají smysl pro a, $b \neq 0$ a $a \neq \pm b$.

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{a(b-a)} + \frac{2}{a^2 - b^2} = \frac{a(b-a) + b(b+a) + (-1)2\,a\,b}{a\,b\,(b^2 - a^2)} =$$
$$= \frac{a\,b - a^2 + b^2 + a\,b - 2\,a\,b}{a\,b\,(b^2 - a^2)} = \frac{b^2 - a^2}{a\,b\,(b^2 - a^2)} = \frac{1}{a\,b}\,.$$

Příklad 1.17: Lomené výrazy mají smysl pro $x \neq \pm 1$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1}+\frac{(-1)}{x+1}+\frac{(-2)}{x^2+1} &= \frac{(x+1)(x^2+1)-(x-1)(x^2+1)-2(x-1)(x+1)}{x^4-1} = \\ &= \frac{x^3+x^2+x+1-(x^3-x^2+x-1)-2(x^2-1)}{x^4-1} = \frac{4}{x^4-1}\,.\end{aligned}$$

Příklad 1.18: Lomený výraz má smysl pro $x, y \neq 0$ a $\frac{1}{x} \neq \frac{1}{y}$ t.j. $x \neq y$.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} &= \frac{\frac{x^2-y^2}{x\,y}}{\frac{y-x}{x\,y}} = \frac{(x-y)(x+y)}{x\,y}\cdot\frac{x\,y}{y-x} = \\ &= \frac{(-1)(x+y)}{1} = -(x+y)\,.\end{aligned}$$

Příklad 1.19: Lomený výraz má smysl pro $u \neq 0$, $u \neq 1$ a $4\,u^2 \neq 1$ t.j. $u \neq \pm\frac{1}{2}$.

$$\frac{\frac{4\,u}{u-1}-\frac{1}{u(u-1)}}{\frac{4\,u-1}{u-1}+\frac{1}{u}} = \frac{\frac{4\,u^2-1}{u(u-1)}}{\frac{4\,u^2-u+u-1}{u(u-1)}} = \frac{4\,u^2-1}{u(u-1)}\cdot\frac{u(u-1)}{4\,u^2-1} = 1\,.$$

R1.5. Úprava výrazů - řešení

Příklad 1.20: Výraz má smysl, jestliže $x^2 > 1$, $x \neq 0$, $\sqrt{x^2-1} \neq \pm x$. První nerovnost je splněna, když $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, poslední nerovnost je splněna vždy. Výraz má tedy smysl pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

$$\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}-x} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}\right) =$$

$$= \left(\frac{x^2-1-x^2}{x\sqrt{x^2-1}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x-\sqrt{x^2-1}+x}{x^2-1-x^2}\right) = \frac{(-1)}{x\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{2\,x}{(-1)} = \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}\,.$$

Příklad 1.21: Výraz má smysl, jestliže $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$.

$$\frac{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{y}}} = \frac{\dfrac{x-y}{\sqrt{y}\sqrt{x}}}{\dfrac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}} = \frac{x-y}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} = \frac{(x-y)(\sqrt{y}+\sqrt{x})}{(\sqrt{y}-\sqrt{x})(\sqrt{y}+\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{(x-y)(\sqrt{y}+\sqrt{x})}{(y-x)} = -(\sqrt{y}+\sqrt{x})\,.$$

Příklad 1.22: Výraz má smysl, jestliže $x \neq \pm 1$ a $y \neq 0$.

$$\frac{\dfrac{y+1}{x-1} - \dfrac{y-1}{x+1}}{\dfrac{y}{x-1} - \dfrac{y}{x+1}} = \frac{\dfrac{(y+1)(x+1) - (y-1)(x-1)}{x^2-1}}{\dfrac{y(x+1) - y(x-1)}{x^2-1}} =$$

$$= \frac{\dfrac{(x\,y + x + y + 1 - x\,y + x + y - 1}{x^2-1}}{\dfrac{x\,y + y - x\,y + y}{x^2-1}} = \frac{\dfrac{2(x+y)}{x^2-1}}{\dfrac{2\,y}{x^2-1}} = \frac{x+y}{y}\,.$$

R2. Řešení rovnic - řešení

R2.1. Algebraické rovnice o jedné neznámé - řešení

Příklad 2.1: Rovnici řešíme pomocí ekvivalentních úprav:

$$\begin{aligned} 4x-2(1-x)-3(x+2) &= 6x-8 \\ 4x-2+2x-3x-6 &= 6x-8 \;/-6x+8 \\ -3x &= 0 \;/:(-3) \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Daná rovnice má jediné reálné řešení: $K=\{0\}$.

Příklad 2.2: Rovnici řešíme pomocí ekvivalentních úprav:

$$\begin{aligned} 4x-2(1-x)-3(x+2) &= 6x-9 \\ 4x-2+2x-3x-6 &= 6x-9 \;/-6x+8 \\ -3x &= -1 \;/:(-3) \\ x &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Daná rovnice má jediné reálné řešení: $K=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Příklad 2.3: Rovnici řešíme pomocí ekvivalentních úprav:

$$\begin{aligned} 4x - 2(1+x) - 3(x+2) &= 8 - x \\ 4x - 2 - 2x - 3x - 6 &= 8 - x \\ -x - 8 &= 8 - x \ / + x \\ -8 &= 8. \end{aligned}$$

Poslední rovnost nikdy nenastane, rovnice proto nemá žádné reálné řešení, $K = \emptyset$.

Příklad 2.4: Rovnici řešíme pomocí ekvivalentních úprav:

$$\begin{aligned} 4x - 2(1-x) - 3(x+2) + 8 - 3x &= 0 \\ 4x - 2 + 2x - 3x - 6 + 8 - 3x &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnost je vždy pravdivá, proto $K = \mathbb{R}$.

Příklad 2.5: Daná rovnice má smysl, jsou-li splněny podmínky $16-x^2 \neq 0$, $4-x \neq 0$, $4+x \neq 0$, tedy pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}$. Postupnými úpravami dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{3x+8}{16-x^2} &= \frac{5}{2(4-x)} - \frac{1}{2(x+4)} \;/\cdot 2(4-x)(4+x) \\ 2(3x+8) &= 5(x+4) - (4-x) \\ 6x+16 &= 5x+20-4+x \;/ -6x-16 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnost je vždy pravdivá. Řešením dané rovnice jsou tedy všechny hodnoty x, pro něž má rovnice smysl, tj. $K = \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}$.

Příklad 2.6: Rovnice má smysl pro $x \neq 0$. Postupnými úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{t^2-1}{x} &= t-1 \,/\cdot x \\ (t-1)(t+1) &= (t-1)x \end{aligned}$$

Dále rozlišíme tři případy:

- pro $t = 1$ odtud plyne $0x = 0$, tedy $K = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- pro $t = -1$ dostaneme rovnici $0 = -2x$, které nevyhovuje žádné přípustné reálné číslo (vzhledem k definičnímu oboru rovnice), $K = \emptyset$,
- pro $t \neq \pm 1$ lze rovnici dělit výrazem $(t-1)$, odtud plyne $x = t+1$, tedy $K = \{t+1\}$.

Závěr můžeme zapsat pomocí přehledné tabulky:

t	$K(t)$
$t = 1$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$t = -1$	$\emptyset$
$t \neq \pm 1$	$\{t+1\}$

Příklad 2.7: a) V této rovnici je $a = 1$, $b = -2$, $c = -15$, pro její diskriminant platí $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64 > 0$. Rovnice má proto dva reálné kořeny

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = 5 \\ \searrow \quad x_2 = -3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad K = \{-3, 5\}.$$

b) Pro $a = -1$, $b = 5$, $c = -8$ platí $b^2 - 4ac = 25 - 32 = -7 < 0$, takže rovnice má 2 komplexně sdružené kořeny:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-7}}{-2} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad K = \left\{ \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i} \right\}.$$

V případě, kdybychom v zadání požadovali řešení pouze v reálném oboru, rovnice by neměla žádné řešení.
c) $D = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \cdot 49 = 0$, rovnice má jediný (dvojnásobný) reálný kořen:

$$x_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{0}}{2} = -7 \quad \Rightarrow \quad K = \{-7\}.$$

Příklad 2.8: Zkusme do rovnice postupně dosazovat čísla ± 1, ± 2 atd. Snadno ověříme, že $x_1 = -1$ danou rovnici splňuje. To znamená, že mnohočlen $2x^3 - 9x^2 + 4x + 15$ má kořenový činitel $x + 1$. Provedeme dělení:

$$
\begin{array}{l}
\quad (2x^3 - 9x^2 + 4x + 15) : (x + 1) = 2x^2 - 11x + 15 \\
-\underline{(2x^3 + 2x^2)} \\
\qquad\qquad 11x^2 + 4x + 15 \\
\qquad - \underline{(11x^2 - 11x)} \\
\qquad\qquad\qquad 15x + 15 \\
\qquad\qquad - \underline{(15x + 15)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Nyní již můžeme zadanou rovnici přepsat v součinovém tvaru:

$$2x^3 - 9x^2 + 4x + 15 = (x + 1)(2x^2 - 11x + 15) = 0.$$

Tedy buď $x+1 = 0$ nebo $2x^2-11x+15 = 0$. Kvadratická rovnice $2x^2-11x+15 = 0$ má dva kořeny

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 8 \cdot 15}}{4} = \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = 3 \\ \searrow \quad x_2 = \frac{5}{2}. \end{array}$$

Pro množinu kořenů platí $K = \left\{-1, \frac{5}{2}, 3\right\}$.

Příklad 2.9: Mnohočlen na levé straně rovnice pomocí postupného vytýkání zapíšeme v součinovém tvaru:

$$\begin{aligned} x^2(x-7)+(x-7) &= 0 \\ (x-7)(x^2+1) &= 0. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme dvě možnosti: $x-7=0$ nebo $x^2+1=0$, tedy $x_1=7$, $x_{2,3}=\pm\mathrm{i}$. Daná rovnice má tři kořeny, $K=\{-7,\pm\mathrm{i}\}$.

Příklad 2.10:

$$\begin{aligned} 4+\sqrt{x^2-16} &= x \;/-4 \\ \sqrt{x^2-16} &= x-4 \;/^2 \\ x^2-16 &= x^2-8x+16 \;/+8x+16 \\ 8x &= 32 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Zk.: $L(4)=4+\sqrt{4^2-16}=4, \qquad P(4)=4, \qquad L(4)=P(4), \qquad K=\{4\}$

Příklad 2.11:

$$\begin{aligned} 1+\sqrt{x} &= \sqrt{x+3} \ /^2 \\ 1+2\sqrt{x}+x &= x+3 \ / -1-x \\ 2\sqrt{x} &= 2 \\ \sqrt{x} &= 1 \ /^2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Zk.: $L(1) = 1+\sqrt{1} = 2, \qquad P(1) = \sqrt{1+3} = 2, \qquad L(1) = P(1), \qquad K = \{1\}$

Příklad 2.12:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+8} &= x-2\sqrt{2} \ /^2 \\ x^2+8 &= x^2-4\sqrt{2}x+8 \ / -x^2-8 \\ 0 &= -4\sqrt{2}x \\ 0 &= x \end{aligned}$$

Zk.: $L(0) = \sqrt{0+8} = 2\sqrt{2}, \qquad P(0) = 0-2\sqrt{2}, \qquad L(0) \neq P(0), \qquad K = \emptyset.$

R2.2. Jednoduché exponenciální a logaritmické rovnice - řešení

Příklad 2.13: Použitím pravidel pro počítání s mocninami rovnici upravíme do podoby

$$
\begin{aligned}
(2^2)^{x-1} &= 5^{2-2x}\\
2^{2x-2} &= 5^{2-2x}\\
\left(\frac{2}{5}\right)^{2x-2} &= 1\\
\left(\frac{2}{5}\right)^{2x-2} &= \left(\frac{2}{5}\right)^{0}\\
2x-2 &= 0\\
x &= 1.
\end{aligned}
$$

Pokud bychom nejprve obě strany rovnice logaritmovali a až poté upravovali, vypadal by výpočet takto:

$$
\begin{aligned}
\log 4^{x-1} &= \log 5^{2-2x}\\
(x-1)\log 4 &= (2-2x)\log 5\\
x(\log 4 + 2\log 5) &= 2\log 5 + \log 4\\
x &= \frac{2\log 5 + \log 4}{2\log 5 + \log 4} = 1.
\end{aligned}
$$

Daná rovnice má jediné reálné řešení: $K = \{1\}$.

Příklad 2.14: Použitím pravidel pro počítání s mocninami dostaneme

$$\begin{aligned} 5\cdot 5^x - 4\cdot 5^x &= 5\cdot\frac{1}{5}\cdot 5^x \\ (5-4)\cdot 5^x &= 5^x \\ 5^x &= 5^x. \end{aligned}$$

Této rovnici vyhovuje každé reálné číslo, tj. $K=\mathbb{R}$.

Příklad 2.15: Pomocí pravidel pro práci s mocninami dostaneme:

$$\begin{aligned} 2^{2x} - 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^x - 5\cdot 2^x + 4\cdot 2\cdot 2^x - 22 &= 0 \\ 2^{2x} + \frac{3}{2}\cdot 2^x - 22 &= 0. \end{aligned}$$

Nyní zvolíme substituci $y=2^x$, tj. $2^{2x}=(2^2)^x=(2^x)^2=y^2$, čímž danou rovnici převedeme na rovnici kvadratickou $y^2+\frac{3}{2}y-22=0$, pro kterou platí

$$y_{1,2} = \frac{-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+88}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{361}}{4} = \begin{cases} \nearrow & y_1 = 4 \\ \searrow & y_2 = -\frac{11}{2}. \end{cases}$$

Vrátíme-li se k původní substituci, dostáváme dvě rovnice $2^x=4$ a $2^x=-\frac{11}{2}$. První z těchto rovnic má kořen $x=2$, druhá rovnice nemá žádné reálné řešení (2^x je vždy číslo kladné). Celkem $K=\{2\}$.

Příklad 2.16: S využitím pravidel pro počítání s logaritmy lze psát

$$\ln x(x+9) = \ln(2^4 \cdot 7).$$

Odtud plyne $x(x+9) = 112$. Danou logaritmickou rovnici se nám podařilo převést na rovnici kvadratickou:

$$x^2 + 9x - 112 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 112}}{2} = \frac{-9 \pm 23}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = 7 \\ \searrow \quad x_2 = -16. \end{array}$$

Pro oba kořeny nyní provedeme zkoušku:

$$\begin{array}{lcl} L(7) & = & \ln 7 + \ln 16 = \ln(7 \cdot 16) = \ln 112 \\ P(7) & = & 4 \ln 2 + \ln 7 = \ln(2^4 \cdot 7) = \ln 112, \text{ tedy } L(7) = P(7) \\ L(-16) & = & \ln(-16) + \ldots \text{tato hodnota není definována, druhý kořen nevyhovuje} \end{array}$$

Daná logaritmická rovnice má jediné řešení, $K = \{7\}$.

R2.3. Jednoduché goniometrické rovnice - řešení

Příklad 2.17: Nejprve najdeme ostrý úhel x_0, pro který platí $\operatorname{cotg} x_0 = \sqrt{3}$, tedy $x_0 = \frac{\pi}{6}$. Kotangens je funkce záporná ve II. kvadrantu, základní orientovaný úhel v tomto případě tedy bude

$$x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi.$$

Vzhledem ke skutečnosti, že kotangens je π-periodická funkce, plyne odtud množina všech řešení

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{5}{6}\pi + k\pi \right\}.$$

Příklad 2.18: Substitucí $y = 2x - \frac{\pi}{2}$ získáme základní goniometrickou rovnici $\cos y = -1$, která je splněna pro $y = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vrátíme se zpět k substituci $y = 2x - \frac{\pi}{2}$ a dostáváme

$$\begin{aligned} 2x - \tfrac{\pi}{2} &= \pi + 2k\pi \\ 2x &= \tfrac{3}{2}\pi + 2k\pi \\ \\ x &= \tfrac{3}{4}\pi + k\pi \end{aligned}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3}{4}\pi + k\pi \right\}.$$

Příklad 2.19: S využitím identity $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ rovnici upravíme do tvaru

$$\begin{aligned} 2(1-\cos^2 x) - 5\cos x - 5 &= 0 \;/ : (-1) \\ 2\cos^2 x + 5\cos x + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Nyní zvolíme substituci $y = \cos x$ a řešíme příslušnou kvadratickou rovnici $2y^2 + 5y + 3 = 0$:

$$y_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 3\cdot 2}}{4} = \begin{cases} y_1 = -1 \\ y_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Vrátíme se zpět k substituci $y = \cos x$ a dostáváme

$$\cos x = -1 \qquad \text{nebo} \qquad \cos x = -\frac{3}{2}.$$

První možnost nastává pro $x = \pi + 2k\pi$, druhá možnost nenastává, protože $|\cos x| \leq 1$. Celkem platí

$$K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\pi + 2k\pi\}.$$

R2.4. Rovnice s absolutní hodnotou - řešení

Příklad 2.20: Nulovým bodem absolutní hodnoty v této rovnici je $x = \frac{1}{4}$.

Za předpokladu $4x-1 < 0$ platí $|4x-1| = -(4x-1)$ a danou rovnici lze přepsat do podoby $-(4x-1) = 2+3x$, odkud plyne $x = -\frac{1}{7}$. Tato hodnota splňuje podmínku $4x - 1 < 0$, jde tedy o kořen dané rovnice.

Dále vyřešíme případ $4x - 1 \geq 0$, pro který platí $|4x - 1| = 4x - 1$ a rovnice má podobu $4x - 1 = 2 + 3x$, odkud vychází $x = 3$, přičemž $3 \in \langle \frac{1}{4}, \infty)$. Celkem dostáváme $K = \{-\frac{1}{7}; 3\}$.

Příklad 2.21: Nulovými body jsou hodnoty 0, 2. Pro lepší přehlednost si můžeme vše zapsat formou tabulky:

	$\lvert 4x-8\rvert$	$\lvert x\rvert$	$\lvert 4x-8\rvert + 3\lvert x\rvert = x+1$
$x \in (-\infty; 0)$	$8-4x$	$-x$	$8-4x-3x = x+1$
$x \in \langle 0; 2)$	$8-4x$	x	$8-4x+3x = x+1$
$x \in \langle 2; \infty)$	$4x-8$	x	$4x-8+3x = x+1$

V případě $x \in (-\infty; 0)$ řešíme rovnici přepsanou bez absolutních hodnot $8 - 4x - 3x = x + 1$, odkud dostáváme $x = \frac{7}{8}$. Protože $\frac{7}{8} \notin (-\infty; 0)$, nejde o kořen dané rovnice.

Pro $x \in \langle 0; 2)$ má rovnice tvar $8 - 4x + 3x = x + 1$, odkud $x = \frac{7}{2}$, ale $\frac{7}{2} \notin \langle 0; 2)$.

Konečně pro $x \in \langle 2; \infty)$ řešíme rovnici $4x - 8 + 3x = x + 1$, jíž vyhovuje $x = \frac{3}{2}$, přičemž $\frac{3}{2} \notin \langle 2; \infty)$.

Celkově nemá zadaná rovnice žádné řešení: $K = \emptyset$.

Příklad 2.22: Nulovými body jsou hodnoty 0, 2. Pro lepší přehlednost si můžeme vše zapsat formou tabulky:

	$\|4x-8\|$	$\|x\|$	$\|4x-8\|-3\|x\|=x+1$
$x \in (-\infty; 0)$	$8-4x$	$-x$	$8-4x+3x=x+1$
$x \in \langle 0; 2)$	$8-4x$	x	$8-4x-3x=x+1$
$x \in \langle 2; \infty)$	$4x-8$	x	$4x-8-3x=x+1$

V případě $x \in (-\infty; 0)$ řešíme rovnici přepsanou bez absolutních hodnot $8-4x+3x=x+1$, odkud dostáváme $x=\frac{7}{2}$. Protože $\frac{7}{2} \notin (-\infty; 0)$, nejde o kořen dané rovnice.

Pro $x \in \langle 0; 2)$ má rovnice tvar $8-4x-3x=x+1$, odkud $x=\frac{7}{8}$, přičemž $\frac{7}{8} \in \langle 0; 2)$.

Konečně pro $x \in \langle 2; \infty)$ řešíme rovnici $4x-8-3x=x+1$, jíž nevyhovuje žádné reálné číslo.

Celkově má zadaná rovnice jediné řešení: $K=\{\frac{7}{8}\}$.

R2.5. Soustavy rovnic - řešení

Příklad 2.23: Soustavu vyřešíme dosazovací metodou – z druhé rovnice vyjádříme neznámou $x = 6y - 39$, dosazením do první rovnice odtud dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} 5(6y-39)+2y &= -3 \\ 30y-195+2y &= -3 \\ 32y &= 192 \\ y &= 6. \end{aligned}$$

Jestliže tuto hodnotu nyní dosadíme do vyjádření x, dostaneme $x = 6\cdot 6 - 39 = -3$. Daná soustava má tedy jediné řešení $x = -3$ a $y = 6$, neboli její řešení je jediná uspořádaná dvojice čísel $(x, y) = (-3, 6)$, tedy $K = \{(-3, 6)\}$.

Příklad 2.24: Soustavu vyřešíme sčítací metodou. Po vynásobení první rovnice dvěma a druhé rovnice sedmi dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 14x + 6y &= -10 \\ -14x + 7y &= -42. \end{aligned}$$

Sečtením levých a pravých stran těchto rovnic získáme rovnici o jedné neznámé $13y = -52$, odkud snadno vypočteme $y = -4$. Po odsazení např. do první rovnice soustavy platí $7x - 12 = -5$, tj. $x = 1$. Řešením dané soustavy je jediná uspořádaná dvojice $(x, y) = (1, -4)$, tj. $K = \{(1, -4)\}$.

R3. Řešení nerovnic - řešení

R3.1. Lineární nerovnice a jejich soustavy - řešení

Příklad 3.1: Postupnými úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned}
4(2-x)-3(x-1)+2x-9 &\leq 5x-8\\
8-4x-3x+3+2x-9 &\leq 5x-8\\
-5x+2 &\leq 5x-8\\
-10x &\leq -10 \ / : (-10)\\
x &\geq 1.
\end{aligned}$$

Množinou všech řešení je interval $K = \langle 1; \infty)$.

Příklad 3.2: Pomocí elementárních úprav dostaneme:

$$\begin{aligned}
16x^2-8x+1+2-2x-2x-2 &< 4(4x^2+12x+9) \ / - 16x^2\\
-8x+1-4x &< 48x+36 \ / + 12x - 36\\
-35 &< 60x \ / : 60\\
-\frac{7}{12} &< x.
\end{aligned}$$

Množina kořenů $K = (-\frac{7}{12}; \infty)$.

Příklad 3.3: První nerovnice je splněna pro $x > \frac{3}{2}$, druhá platí pro $x \geq -2$. Množina všech řešení dané soustavy je průnikem intervalů $(\frac{3}{2}; \infty)$ a $\langle -2; \infty)$, tedy $K = (\frac{3}{2}; \infty)$.

R3.2. Nerovnice s absolutní hodnotou - řešení

Příklad 3.4: Vydělíme-li danou nerovnici dvěma, dostaneme nerovnici $|x-2| \leq 4$, kterou můžeme řešit geometricky. Jejím řešením jsou všechna čísla x, jejichž obrazy na číselné ose mají od obrazu čísla 2 vzdálenost ne větší než 4, tj. čísla z množiny $\langle -2; 6\rangle$, $K = \langle -2; 6\rangle$.

Příklad 3.5: Provedeme diskusi různých možností znamének výrazu v absolutní hodnotě a vyřešíme vzniklé nerovnice bez absolutní hodnoty.
Pro $x \in (-\infty; \frac{1}{4}\rangle$ platí $|1-4x| = 1-4x$; v tomto případě tedy řešíme nerovnici $1-4x \leq 5$, odkud dostáváme $x \geq -1$, tj. $K_1 = (-\infty; \frac{1}{4}\rangle \cap \langle -1; \infty) = \langle -1; \frac{1}{4}\rangle$.
Pro $x \in (\frac{1}{4}; \infty)$ je $|1-4x| = -(1-4x) = 4x-1$ a my řešíme nerovnici $4x-1 \leq 5$, jíž vyhovují hodnoty $x \leq \frac{3}{2}$, odkud $K_2 = (\frac{1}{4}; \infty) \cap (-\infty; \frac{3}{2}\rangle = (\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\rangle$. Celkem dostáváme množinu kořenů $K = K_1 \cup K_2 = \langle -1; \frac{3}{2}\rangle$.

Příklad 3.6: Nerovnici vyřešíme metodou nulových bodů, které jsou v tomto případě tři (0, 2 a -1):

	$\lvert x\rvert$	$\lvert 2-x\rvert$	$\lvert x+1\rvert$	$\lvert x\rvert+\lvert 2-x\rvert-2\lvert x+1\rvert \geq 5$
$x \in (-\infty; -1\rangle$	$-x$	$2-x$	$-x-1$	$-x+2-x+2x+2 \geq 5$
$x \in (-1; 0\rangle$	$-x$	$2-x$	$x+1$	$-x+2-x-2x-2 \geq 5$
$x \in (0; 2\rangle$	x	$2-x$	$x+1$	$x+2-x-2x-2 \geq 5$
$x \in (2; \infty)$	x	$x-2$	$x+1$	$x-2+x-2x-2 \geq 5$

Pro $x \leq -1$ řešíme lineární nerovnici $-x+2-x+2x+2 \geq 5$, tedy $4 \geq 5$, která však nemá žádné řešení.

Pro $x \in (-1; 0\rangle$ řešíme nerovnici $-x+2-x-2x-2 \geq 5$, která platí pro $x \leq -\frac{5}{4}$. Protože $(-1; 0\rangle \cap (-\infty; -\frac{5}{4}\rangle = \emptyset$, v daném intervalu opět nedostáváme žádné řešení.

V případě $x \in (0; 2\rangle$ má daná nerovnice podobu $x+2-x-2x-2 \geq 5$, odkud plyne $x \leq -\frac{5}{2}$. Tuto podmínku nesplňuje žádné $x \in (0; 2\rangle$.

Konečně pro $x \in (2; \infty)$ řešíme lineární nerovnici $x-2+x-2x-2 \geq 5$, která rovněž nemá žádné řešení. Celkem dostáváme závěr $K = \emptyset$.

Příklad 3.7: První nerovnici vyhovují $x \in (-\infty; -4\rangle \cup \langle -2; \infty)$, druhá nerovnice platí pro $x \in \langle -4; 2\rangle$. Ověřte podrobně sami! Množina řešení dané soustavy je průnikem těchto množin, tedy $K = \{-4\} \cup \langle -2; 2\rangle$.

R3.3. Nerovnice součinového a podílového typu - řešení

Příklad 3.8: Rovnici vyřešíme metodou nulových bodů. Výrazy v závorkách jsou rovny nule pro $x = 8$ a $x = -\frac{1}{2}$. Tyto nulové body rozdělí reálnou osu na tři intervaly, pro které platí

	$(-\infty; -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}; 8)$	8	$(8; \infty)$
$8 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$2x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(8 - x)(2x + 1)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Danou nerovnici splňují všechna $x \in \langle -\frac{1}{2}; 8\rangle$.

Příklad 3.9: Nerovnici vyřešíme rozborem možností. Součin dvou výrazů je záporný, jestliže je záporný právě jeden z těchto výrazů. Hledáme ty hodnoty x, pro které platí

$$[3x - 4 < 0 \wedge x + 7 > 0] \qquad \vee \qquad [3x - 4 > 0 \wedge x + 7 < 0]$$

První dvě podmínky lze upravit do podoby $x < \frac{4}{3}$ a současně $x > -7$, což platí pro $x \in (-7; \frac{4}{3})$. Podobně zbylé dvě podmínky $x > \frac{4}{3}$ a zároveň $x < -7$ neplatí pro žádné reálné číslo. Řešením dané nerovnice je množina $K = (-7; \frac{4}{3})$.

Příklad 3.10: Prováděním ekvivalentních úprav dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{x-4}{3+x} &\leq 2 \;/ -2 \\
\frac{x-4-2(3+x)}{3+x} &\leq 0 \\
\frac{-x-10}{3+x} &\leq 0 \;/ : (-1) \\
\frac{x+10}{3+x} &\geq 0.
\end{aligned}$$

Nulový bod čitatele je $x = -10$, nulový bod jmenovatele je $x = -3$. Platí tedy

	$(-\infty; -10)$	$(-10; -3)$	$(-3; \infty)$
$x+10$	$-$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x+10}{x+3}$	$+$	$-$	$+$

To, zda nulové body vyhovují dané nerovnici, snadno zjistíme i bez tabulky. Z posledního řádku tabulky je patrné, že $K = (-\infty; -10\rangle \cup (-3; \infty)$.

Příklad 3.11: Nerovnice má smysl pro $x^2 - 10x + 21 \neq 0$, tedy pro $x \neq 3$ a $x \neq 7$. Kvadratické trojčleny v čitateli a ve jmenovateli rozložíme na součin kořenových činitelů:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 10x + 21} = \frac{(x-1)^2}{(x-3)(x-7)}\,.$$

Výraz $(x-1)^2$ je pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{3; 7\}$ nezáporný. Nulové body čitatele a jmenovatele (3 a 7) rozdělí reálnou osu na tři intervaly, na nichž budeme vyšetřovat znamení jednotlivých činitelů:

	$x-3$	$x-7$	$\frac{(x-1)^2}{(x-3)(x-7)}$
$x \in (-\infty; 3)$	$-$	$-$	$+$
$x \in (3; 7)$	$+$	$-$	$-$
$x \in (7; \infty)$	$+$	$+$	$+$

Z tabulky je zřejmé, že daná nerovnice je splněna pro $K = (-\infty; 3) \cup (7; \infty)$.

R3.4. Kvadratické nerovnice - řešení

Příklad 3.12: Danou nerovnici vyřešíme doplněním na čtverec:

$$\begin{aligned}
-6x^2+7x-2 &\geq 0 \,/ : (-6) \\
x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3} &\leq 0 \\
\left(x-\frac{7}{12}\right)^2-\frac{49}{144} &\leq -\frac{1}{3} \\
\left(x-\frac{7}{12}\right)^2 &\leq \frac{1}{144} \,/\sqrt{} \\
\left|x-\frac{7}{12}\right| &\leq \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Řešením získané nerovnice s absolutní hodnotou jsou všechna čísla x, jejichž obraz na reálné ose je od obrazu čísla $\frac{7}{12}$ vzdálen nejvýše o $\frac{1}{12}$, tedy $K = \left\langle \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right\rangle$.

Příklad 3.13: Nerovnici vyřešíme převedením na nerovnici v součinovém tvaru a následnou diskusí možností. Kvadratická rovnice $-3x^2+15x-12=0$ má dva reálné kořeny

$$x_{1,2}=\frac{-15\pm\sqrt{15^2-4\cdot 3\cdot 12}}{-6}=\frac{-15\pm\sqrt{81}}{-6}=\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=4, \end{cases}$$

lze ji proto psát ve tvaru součinu kořenových činitelů $-3(x-1)(x-4)=0$; danou nerovnici lze přepsat do podoby

$$\begin{aligned} -3(x-1)(x-4) &> 0 \;/ : (-3) \\ (x-1)(x-4) &< 0. \end{aligned}$$

Součin dvou výrazů je záporný, je-li právě jeden z těchto výrazů záporný; tím dostaneme soustavu podmínek:

$$[x-1<0 \wedge x-4>0] \quad \vee \quad [x-1>0 \wedge x-4<0]$$

První dvě podmínky lze přepsat do podoby $x<1$ a současně $x>4$, což nelze splnit současně pro žádné reálné číslo x. Podobně zbylé dvě podmínky $x>1$ a $x<4$ platí pro $x\in(1;4)$. Množina všech řešení dané nerovnice je $K=(1;4)$.

R3.5. Nerovnice s neznámou pod odmocninou - řešení

Příklad 3.14: Daná nerovnice má smysl, pokud platí podmínka $-2x^2 - 3x + 14 \geq 0$. Platí-li tato podmínka, je daná nerovnice automaticky splněna (funkční hodnoty druhé odmocniny jsou nezáporné). Řešením kvadratické nerovnice $-2x^2 - 3x + 14 = 0$ najdeme její kořeny:

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 14 = 121$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{121}}{-4} = \frac{3 \pm 11}{-4} \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = -3,5 \\ \searrow \quad x_2 = 2. \end{array}$$

Dále lze tedy psát

$$-2x^2 - 3x + 14 = -2(x-2)(x+3,5) \geq 0,$$

odkud plynou možnosti

$$[x - 2 \leq 0 \ \wedge \ x + 3,5 \geq 0] \vee [x - 2 \geq 0 \ \wedge \ x + 3,5 \leq 0]$$

První dvě podmínky $x \leq 2$ a současně $x \geq -3,5$ platí pro $x \in \langle -3,5; 2\rangle$, zbývajícím dvěma podmínkám $x \geq 2$ a $x \leq -3,5$ nevyhovuje žádné reálné číslo. Řešením dané nerovnice je tedy množina $K = \langle -3,5; 2\rangle$.

Příklad 3.15: Daná soustava má smysl pro $x \geq 0$. Řešme dále nejprve nerovnici

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{1}{2} - \sqrt{x} \ / + 1 + \sqrt{x} \\ \sqrt{x} &\leq \frac{3}{2} \ /^2 \\ x &\leq \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Druhá nerovnice $\frac{1}{2} - \sqrt{x} \leq 1$ dává po úpravě podmínku $\sqrt{x} \geq -\frac{1}{2}$, která je triviálně splněna pro všechna x, pro něž má soustava smysl. Celkem dostáváme množinu kořenů $K = \langle 0; \frac{9}{4} \rangle$.

R3.6. Jednoduché exponenciální nerovnice - řešení

Příklad 3.16: Při řešení této nerovnice využíváme základní vlastnosti exponenciální funkce, a sice faktu, že

$$2^a \geq 2^b \;\Leftrightarrow a \geq b.$$

Postupnými úpravami dostáváme:

$$\begin{aligned} (2^2)^{x-2} &\geq 2^1 \\ 2^{2x-4} &\geq 2^1 \\ 2x-4 &\geq 1 \\ x &\geq \frac{5}{2}, \quad \text{tedy} \;\; K = \left\langle \frac{5}{2}; \infty \right) . \end{aligned}$$

Příklad 3.17: Využijeme-li toho, že $4 = 3^{\log_3 4}$ a platí podmínka $\;3^a < 3^b \;\Rightarrow\; a < b$, dostáváme postupně

$$\begin{aligned} 3^{1-x} &< 3^{\log_3 4} \\ 1-x &< \log_3 4 \;/ + x - \log_3 4 \\ 1-\log_3 4 &< x. \end{aligned}$$

Ověřte si sami, že pro množinu řešení platí $K = (\log_3 \frac{3}{4}; \infty)$.

R3.7. Jednoduché logaritmické nerovnice - řešení

Příklad 3.18: Nerovnice má smysl za podmínky $2-x>0$, tj. $x<2$. Pro $x\in(-\infty;2)$ dostáváme:

$$\ln(2-x)\geq 1 \Leftrightarrow \ln(2-x)\geq \ln \mathrm{e}.$$

Odtud plyne (neboť pro $a,b>0$ platí $\ln a\geq \ln b \quad\Rightarrow\quad a\geq b$) $2-x\geq \mathrm{e}$, tj. $x\leq 2-\mathrm{e}$. Obě podmínky $x<2$ a současně $x\leq 2-\mathrm{e}$ splňují všechna $x\in(-\infty;2-\mathrm{e}\rangle$; $K=(-\infty;2-\mathrm{e}\rangle$.

Příklad 3.19: Nerovnice má smysl za podmínky $2x-1>0$, tj. $x>\frac{1}{2}$. Pro $x\in(\frac{1}{2};\infty)$ dostáváme:

$$\log_{\frac{1}{5}}(2x-1)<0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}}(2x-1)<\log_{\frac{1}{5}}1.$$

Pro $a,b>0$ dále platí

$$\log_{\frac{1}{5}}a<\log_{\frac{1}{5}}b \quad\Rightarrow\quad a>b,$$

takže obdržíme nerovnici $2x-1>1$, tedy $x>1$. Množina všech řešení

$$K=\left(\frac{1}{2};\infty\right)\cap(1;\infty)=(1;\infty)\,.$$

R3.8. Jednoduché goniometrické nerovnice - řešení

Příklad 3.20: Příslušná rovnice $\cos x = \frac{1}{2}$ má v intervalu $\langle 0; 2\pi\rangle$ dvě řešení $x_1 = \frac{\pi}{3}$ a $x_2 = \frac{5}{3}\pi$. Nakreslíme-li si vhodný obrázek, snadno zjistíme, že množina všech řešení dané nerovnice je

$$K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right).$$

R4. Komplexní čísla - řešení

R4.1. Operace s komplexními čísly - řešení

Příklad 4.1: a) $(5+4\,\mathrm{i}\,)+(2-3\,\mathrm{i}\,) \;=\; 5+2+(4-3)\mathrm{i} \;=\; 7+\mathrm{i}\,,$

b) $(2+5\,\mathrm{i}\,)\cdot(-3+8\,\mathrm{i}\,) \;=\; -6+16\,\mathrm{i}-15\,\mathrm{i}+40\,\mathrm{i}^{\,2} \;=\; -6+\mathrm{i}+40(-1) \;=\; -46+\mathrm{i}\,,$

c) $(2-5\,\mathrm{i}\,)^2 \;=\; 4-20\,\mathrm{i}+25\,\mathrm{i}^{\,2} \;=\; 4-20\,\mathrm{i}-25 \;=\; -21-20\,\mathrm{i}\,,$

d) $(2+3\,\mathrm{i}\,)^2-(4+9\,\mathrm{i}\,) \;=\; 4+12\,\mathrm{i}+9\,\mathrm{i}^{\,2}-4-9\,\mathrm{i} \;=\; -9+3\,\mathrm{i}\,,$

e) $4\cdot(5+3\,\mathrm{i}\,)\cdot(2\,\mathrm{i}\,) \;=\; (5+3\,\mathrm{i}\,)\cdot(8\,\mathrm{i}\,) \;=\; 40\,\mathrm{i}+24\,\mathrm{i}^{\,2} \;=\; 40\,\mathrm{i}-24 \;=\; -24+40\,\mathrm{i}\,,$

f) $(1-\mathrm{i}\,)\cdot(1+\mathrm{i}\,)\cdot(3+4\,\mathrm{i}\,) \;=\; (1-\mathrm{i}^{\,2})\cdot(3+4\,\mathrm{i}\,) \;=\; 2\cdot(3+4\,\mathrm{i}\,) \;=\; 6+8\,\mathrm{i}\,.$

Příklad 4.2: a) $\dfrac{2-3\,\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \;=\; \dfrac{(2-3\,\mathrm{i}\,)(-\mathrm{i}\,)}{\mathrm{i}\,(-\mathrm{i}\,)} \;=\; \dfrac{-2\,\mathrm{i}+3\,\mathrm{i}^{\,2}}{-\mathrm{i}^{\,2}} \;=\; \dfrac{-3-2\,\mathrm{i}}{1} \;=\; -3-2\,\mathrm{i}\,,$

b) $\dfrac{3+5\,\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \;=\; \dfrac{(3+5\,\mathrm{i}\,)(1+\mathrm{i}\,)}{(1-\mathrm{i}\,)(1+\mathrm{i}\,)} \;=\; \dfrac{3+3\,\mathrm{i}+5\,\mathrm{i}+5\,\mathrm{i}^{\,2}}{1-\mathrm{i}^{\,2}} \;=\; \dfrac{-2+8\,\mathrm{i}}{2} \;=\; -1+4\,\mathrm{i}\,,$

c) $\dfrac{4+\mathrm{i}}{1+2\,\mathrm{i}}(2+3\,\mathrm{i}\,) \;=\; \dfrac{(4+\mathrm{i}\,)(1-2\,\mathrm{i}\,)}{(1+2\,\mathrm{i}\,)(1-2\,\mathrm{i}\,)}(2+3\,\mathrm{i}\,) \;=\; \dfrac{4-8\,\mathrm{i}+\mathrm{i}-2\,\mathrm{i}^{\,2}}{1-4\,\mathrm{i}^{\,2}}(2+3\,\mathrm{i}\,) \;=$

$$= \frac{6-7\,\mathrm{i}}{5}(2+3\,\mathrm{i}\,) \;=\; \frac{12+18\,\mathrm{i}-14\,\mathrm{i}-21\,\mathrm{i}^{\,2}}{5} \;=\; \frac{33+4\,\mathrm{i}}{5} \;=$$

$$= \frac{33}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}\,,$$

d) $$\frac{(5+3\,\mathrm{i}\,)(3+4\,\mathrm{i}\,)}{1+\mathrm{i}} = \frac{15+20\,\mathrm{i}\, + 9\,\mathrm{i}\, + 12\,\mathrm{i}^{\,2}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(3+29\,\mathrm{i}\,)(1-\mathrm{i}\,)}{(1+\mathrm{i}\,)(1-\mathrm{i}\,)} =$$

$$= \frac{3-3\,\mathrm{i}\, + 29\,\mathrm{i}\, - 29\,\mathrm{i}^{\,2}}{1-\mathrm{i}^{\,2}} = \frac{32-26\,\mathrm{i}}{2} = 16-13\,\mathrm{i}\ ,$$

e) $$\frac{(7+3\,\mathrm{i}\,)(6+2\,\mathrm{i}\,)}{(2+5\,\mathrm{i}\,)(2-6\,\mathrm{i}\,)} = \frac{(42+14\,\mathrm{i}\, + 18\,\mathrm{i}\, + 6\,\mathrm{i}\,)}{(4-12\,\mathrm{i}\, + 10\,\mathrm{i}\, - 30\,\mathrm{i}^{\,2})} = \frac{36+32\,\mathrm{i}}{34-2\,\mathrm{i}} =$$

$$= \frac{(18+16\,\mathrm{i}\,)(17+\mathrm{i}\,)}{(17-\mathrm{i}\,)(17+\mathrm{i}\,)} = \frac{306+18\,\mathrm{i}\, + 272\,\mathrm{i}\, + 16\,\mathrm{i}^{\,2}}{289-\mathrm{i}^{\,2}} =$$

$$= \frac{290+290\,\mathrm{i}}{290} = 1+\mathrm{i}\ ,$$

f) $$\frac{(4-6\,\mathrm{i}\,)(9-6\,\mathrm{i}\,)}{(-9+3\,\mathrm{i}\,)(-5+3\,\mathrm{i}\,)}(6-7\,\mathrm{i}\,) = \frac{36-24\,\mathrm{i}\, - 54\,\mathrm{i}\, + 36\,\mathrm{i}^{\,2}}{45-27\,\mathrm{i}\, - 15\,\mathrm{i}\, + 9\,\mathrm{i}^{\,2}}(6-7\,\mathrm{i}\,) =$$

$$= \frac{-78\,\mathrm{i}}{36-42\,\mathrm{i}}(6-7\,\mathrm{i}\,) = \frac{-13\,\mathrm{i}}{6-7\,\mathrm{i}}(6-7\,\mathrm{i}\,) = -13\,\mathrm{i}\ .$$

R4.2. Goniometrický tvar komplexního čísla

Příklad 4.3: Využijte vzorce:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta.$$

Platí $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$. Využijeme nyní vzorečky pro kosínus a sínus součtu.

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Platí tedy:

$$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + \mathrm{i}\ \sin\frac{7\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\left(\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)\mathrm{i}\right) = (1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})\,\mathrm{i}\ .$$

Příklad 4.4: Komplexní číslo $z = -8 + 8\,\mathrm{i}$ vyjádřeme v goniometrickém tvaru.

$$|z| = \sqrt{(-8)^2+8^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{2\cdot 64} = 8\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \cos\alpha = -\dfrac{8}{8\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{3\pi}{4} & \text{nebo} \quad \dfrac{5\pi}{4} \\ \sin\alpha = \dfrac{8}{8\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{\pi}{4} & \text{nebo} \quad \dfrac{3\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\ \sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Příklad 4.5: Komplexní číslo $z = -\sqrt{3} - 3\,\mathrm{i}$ vyjádřeme v goniometrickém tvaru.

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{array}{llll} \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2} & \Rightarrow & \alpha = \dfrac{2\pi}{3} \quad \text{nebo} & \dfrac{4\pi}{3} \\ \sin\alpha = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \Rightarrow & \alpha = \dfrac{4\pi}{3} \quad \text{nebo} & \dfrac{5\pi}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3}$$

$$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Příklad 4.6: Komplexní číslo $z = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\mathrm{i}$ vyjádřeme v goniometrickém tvaru.

$$|z| = \sqrt{(\tfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}})^2 + (\tfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}})^2} = \sqrt{\tfrac{8}{8}} = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \qquad \cos\alpha - \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\alpha + \tfrac{\pi}{2}) + \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \sin(\alpha + \tfrac{\pi}{2}) - \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2\,\sin(\alpha + \tfrac{\pi}{4})\cos\tfrac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad 2\,\cos(\alpha + \tfrac{\pi}{4})\sin\tfrac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\alpha + \tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos(\alpha + \tfrac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha + \frac{\pi}{4} = \dfrac{2\pi}{3} \quad \text{nebo} \quad \dfrac{4\pi}{3} \\ \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha + \frac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3} \quad \text{nebo} \quad \dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + \tfrac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$$

$$z = \left(\cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\ \sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

Příklad 4.7: Použijeme vzorec pro součin komplexních čísel v goniometrickém tvaru:

$$\left(\cos\frac{3}{7}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{7}\pi\right)\left(\cos\frac{4}{7}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{4}{7}\pi\right) = \left(\cos\frac{3+4}{7}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3+4}{7}\pi\right) =$$

$$= (\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = -1 + \mathrm{i}\,0 = -1\,.$$

Příklad 4.8: Použijeme vzorec pro součin komplexních čísel v goniometrickém tvaru:

$$\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\cos\frac{1+2}{12}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1+2}{12}\pi\right) =$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\,.$$

Příklad 4.9: Použijeme Moivreovu větu:

$$\left(\cos\frac{\pi}{15} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{15}\right)^{35} = \left(\cos\frac{35}{15}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{35}{15}\pi\right) = \left(\cos\frac{7}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{7}{3}\pi\right) =$$

$$= \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)\right) = \left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\,.$$

Příklad 4.10: Nejprve vyjádříme komplexní číslo $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ v goniometrickém tvaru.

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{array}{lllll} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \Rightarrow & \alpha = \dfrac{\pi}{6} & \text{nebo} & \dfrac{11\pi}{6} \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{2} & \Rightarrow & \alpha = \dfrac{\pi}{6} & \text{nebo} & \dfrac{5\pi}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\ \sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Použijeme Moivreovu větu:

$$(\sqrt{3} + \mathrm{i}\,)^7 = 2^7\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\ \sin\frac{\pi}{6}\right)^7 = 128\left(\cos\frac{7}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{7}{6}\pi\right) =$$

$$= 128\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\ \frac{1}{2}\right) = -64(\sqrt{3} + \mathrm{i}\,).$$

Příklad 4.11: Nejprve převedeme komplexní číslo $-5-5\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ do goniometrického tvaru:

$$|z| = \sqrt{(-5)^2+(-5\sqrt{3})^2} = \sqrt{25+75} = \sqrt{100} = 10$$

$$\left.\begin{array}{lll} \cos\alpha = \dfrac{-5}{10} = -\dfrac{1}{2} & \Rightarrow & \alpha = \dfrac{2\pi}{3} \quad \text{nebo} \quad \dfrac{4\pi}{3} \\ \sin\alpha = \dfrac{-5\sqrt{3}}{10} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \Rightarrow & \alpha = \dfrac{4\pi}{3} \quad \text{nebo} \quad \dfrac{5\pi}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3}$$

$$z = 10\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Nyní komplexní číslo odmocníme - získáme dvě různé hodnoty pro $k = 0, 1$:

$$\sqrt{10}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{6}+\frac{2\,k\,\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{4\pi}{6}+\frac{2\,k\,\pi}{2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{10}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{10}}{2}(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\,), \\ z_1 &= \sqrt{10}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\right)\right) = \sqrt{10}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2}(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\,). \end{aligned}$$