

Vysoká škola chemicko-technologická v Praze
Fakulta chemicko-inženýrská
Ústav matematiky

Teze disertační práce

Bifurkační analýza
autonomních soustav
obyčejných diferenciálních rovnic
s nespojitými pravými stranami

Ing. Tomáš Hanus
Školitel: Doc. RNDr. Drahoslava Janovská, CSc.

1 Souhrn

Nespojité dynamické systémy se objevují v mnoha aplikacích. V nehladké mechanice podléhá pohyb těles rychlostním a silovým skokům v důsledku tření a nárazů. Skřípění automobilu při prudkém brzdění je způsobeno pohybem typu přilepení a sklouznutí. Nespojité řešení usnadňuje modelování šíření trhlin. Mnoho aplikací lze nalézt v elektronice. Pulzní řízení se používá u servomotorů. Jednoduchý Filippovův systém se uplatní v regulaci se zpětnou vazbou. Při optimálním řízení se používá dvoupolohová regulace, aby se střídáním dvou krajních hodnot dosáhl minimální čas přechodu z počátečního do koncového stavu.

Naším cílem je použití nástrojů kvalitativní analýzy spojitých dynamických systémů na nespojité Filippovy systémy. Funkce jako jsou potenciál, Hamiltonián a Ljapunovova funkce mohou popsat globální chování Filippovova systému. Kvalitativními metodami zkoumáme fázový portrét, stabilitu, bifurkace a další lokální a globální vlastnosti Filippových systémů.

Soustředíme se na aplikace v chemii a biologii. Zkoumáme chování CSTR s přepadem. Předpokládáme, že v reaktoru probíhá jednoduchá chemická reakce. V tomto systému uskutečníme studii s jedním parametrem. Je-li objem náplně reaktoru ovládán čerpadlem, chování systému se změní.

Nakonec se zaměříme na modely typu dravec-kořist, jimiž se řídí četné děje v populační dynamice, reakční kinetice, statistické termodynamice. Uvažujeme jen dva soutěžící druhy organismů, model je variací systému Lotky-Volterra, speciálním typem Bazykinova ekologického modelu.

Klíčová slova

nespojité dynamický systém, diferenciální rovnice s nespojitou pravou stranou, po částech hladký dynamický systém, nehladký dynamický systém, Filippovův systém, potenciál, Hamiltonián, Ljapunovova funkce

2 Kvalitativní analýza Filippových systémů

Nechť S je jednoduše souvislá oblast v \mathbb{R}^2 . Nechť S je rozdělena na dvě disjunktní podmnožiny S_1 a S_2 , které jsou neprázdné, otevřené v \mathbb{R}^2 , $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $\overline{S_1} \cup \overline{S_2} = S$. Hranice mezi množinami je $\Sigma_{12} = \overline{S_1} \cap \overline{S_2}$.

Definice 1 Nechť jsou dána dvě spojitá vektorová pole $\mathbf{F}_1 : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}_2 : S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Vektorové pole $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované po částech

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{F}_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in S_1, \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in S_2, \\ \mathbf{G}_{12}^s(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Sigma_{12}^s, \\ \mathbf{G}_{12}^c(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Sigma_{12}^c, \end{cases}$$

se nazývá Filippovo vektorové pole.

O tom, zda je konkrétní bod $\mathbf{x} \in S$ prvkem S_1 , S_2 nebo Σ_{12} , rozhoduje spojitá a hladká funkce $h : S \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in S_1 &\Leftrightarrow h(\mathbf{x}) > 0, \\ \mathbf{x} \in \Sigma_{12} &\Leftrightarrow h(\mathbf{x}) = 0, \\ \mathbf{x} \in S_2 &\Leftrightarrow h(\mathbf{x}) < 0. \end{aligned}$$

Zda je konkrétní bod $\mathbf{x} \in \Sigma_{12}$ prvkem Σ_{12}^s nebo Σ_{12}^c , určuje funkce $\sigma : \Sigma_{12} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \Sigma_{12}^s &\Leftrightarrow \sigma(\mathbf{x}) \leq 0, \\ \mathbf{x} \in \Sigma_{12}^c &\Leftrightarrow \sigma(\mathbf{x}) > 0. \end{aligned}$$

$$\sigma(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\Sigma}_n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}_1(\mathbf{x})) (\boldsymbol{\Sigma}_n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{x})),$$

kde $\boldsymbol{\Sigma}_n(\mathbf{x})$ je nenulový normálový vektor k Σ_{12} v bodě $\mathbf{x} \in \Sigma_{12}$.

$$\mathbf{G}_{12}^s(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) \mathbf{F}_2(\mathbf{x}),$$

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{\Sigma}_n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{x})}{\boldsymbol{\Sigma}_n(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_1(\mathbf{x}))},$$

$$\mathbf{G}_{12}^c(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{x})).$$

Nechť integrační cesta z bodu A do bodu B je po částech hladká křivka \mathcal{K} , která je orientovaným součtem křivek $\mathcal{K}_1 \dots \mathcal{K}_r$,

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathcal{K}_r,$$

kde každá část \mathcal{K}_i má hladkou parametrizaci,

$$\mathcal{K}_i = \Phi_i(I_i), \quad \Phi_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad I_i = \langle a_i, b_i \rangle.$$

$$A = A_1 = \Phi_1(a_1),$$

$$\Phi_i(b_i) = B_i = A_{i+1} = \Phi_{i+1}(a_{i+1}), \quad i = 1 \dots r - 1$$

$$\Phi_r(b_r) = B_r = B.$$

Nechť S je jednoduše souvislá oblast v \mathbb{R}^2 , na které je definováno Filippovo vektorové pole \mathbf{F} . Vložíme po částech hladkou křivku $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathcal{K}_r$ do S . Jestliže hranice Σ_{12} protne křivku \mathcal{K} , průsečík od sebe oddělí nově vzniklé části křivky \mathcal{K} . Pokud nějaký úsek křivky \mathcal{K} leží celý na hranici Σ_{12} , stane se také nově vzniklou částí křivky \mathcal{K} . Vznikne tedy nové rozdělení křivky \mathcal{K} ,

$$\mathcal{K} = \tilde{\mathcal{K}}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \tilde{\mathcal{K}}_s, \quad r \leq s.$$

Na každé nové části $\tilde{\mathcal{K}}_i, i = 1 \dots s$ je křivka hladká a vektorové pole \mathbf{F} spojitě. Výjimkou mohou být krajní body A_i, B_i .

Definice 2 *Křivkovým integrálem Filippova vektorového pole \mathbf{F} podél po částech hladké křivky \mathcal{K} z bodu A do bodu B nazýváme součet integrálů*

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbf{F} \cdot d\Phi = \sum_{i=1}^s \int_{\tilde{\mathcal{K}}_i} \mathbf{F} \cdot d\Phi_i,$$

kde Φ_i je hladká parametrizace části $\tilde{\mathcal{K}}_i$ křivky \mathcal{K} .

Definice 3 Necht množina S je jednoduše souvislá oblast v \mathbb{R}^2 . Filippovo vektorové pole $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ je potenciální, právě když existuje skalární funkce $U : S \rightarrow \mathbb{R}$, nazývaná potenciál, taková, že

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x}(x, y), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) \right] = \mathbf{F}_1(x, y), \quad \forall [x, y] \in S_1, \quad (1)$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x}(x, y), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) \right] = \mathbf{F}_2(x, y), \quad \forall [x, y] \in S_2, \quad (2)$$

$$U(x, y) \text{ je spojitá } \forall [x, y] \in \Sigma_{12}. \quad (3)$$

Věta 1 Necht množina S je jednoduše souvislá oblast v \mathbb{R}^2 . Filippovo vektorové pole $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ je potenciální, právě když

- a) \mathbf{F}_1 je potenciální na S_1 a jeho potenciál U_1 lze spojitě rozšířit na $\overline{S_1}$,
- b) \mathbf{F}_2 je potenciální na S_2 a jeho potenciál U_2 lze spojitě rozšířit na $\overline{S_2}$,
- c) ve všech bodech $[x, y] \in \Sigma_{12}$ je kolmý průmět $\mathbf{F}_1(x, y)$ do tečného směru k Σ_{12} totožný s kolmým průmětem $\mathbf{F}_2(x, y)$ do téhož směru.

Lemma 1 Dva vektory $\mathbf{V}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{V}_2(\mathbf{x})$ v daném bodě \mathbf{x} hladké křivky \mathcal{J} mají totožné kolmé průměty $\mathbf{V}_{1t}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}_{2t}(\mathbf{x})$ do tečného směru k \mathcal{J} , právě když platí $\mathbf{V}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{V}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}_t(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{J}_t(\mathbf{x})$ je nenulový tečný vektor k \mathcal{J} v bodě \mathbf{x} .

Důkaz Lemmatu 1

$$\mathbf{V}_{1t} = \mathbf{V}_{2t} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{J}_t}{\mathbf{J}_t \cdot \mathbf{J}_t} \mathbf{J}_t = \frac{\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{J}_t}{\mathbf{J}_t \cdot \mathbf{J}_t} \mathbf{J}_t \Leftrightarrow \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{J}_t = \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{J}_t$$

Důkaz Věty 1

i)

U_1 a U_2 spojitě rozšíříme na \bar{S}_1 a \bar{S}_2 . Uvažujeme $\Delta\Sigma_{12}$ jako souvislou komponentu množiny Σ_{12} , $\Delta\bar{S}_1$ jako souvislou komponentu množiny \bar{S}_1 , $\Delta\bar{S}_2$ jako souvislou komponentu množiny \bar{S}_2 . Zvolíme bod $[x_0, y_0] \in \Delta\Sigma_{12}$. Nastavíme integrační konstanty U_1 a U_2 na $\Delta\bar{S}_1$ a $\Delta\bar{S}_2$ přiléhajících k $\Delta\Sigma_{12}$ tak, že $U_1(x_0, y_0) = U_2(x_0, y_0)$. Integrujeme U_1 a U_2 podél křivky $\Delta\Sigma_{12}$ z bodu $[x_0, y_0] \in \Delta\Sigma_{12}$ do libovolného bodu $[x, y] \in \Delta\Sigma_{12}$.

$$U_1(x, y) = U_1(x_0, y_0) + \int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r},$$

$$U_2(x, y) = U_2(x_0, y_0) + \int \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}, \quad d\mathbf{r} = [dx, dy].$$

Ve všech bodech Σ_{12} platí $\mathbf{F}_{1t} = \mathbf{F}_{2t}$. Podle Lemmatu 1 platí $\mathbf{F}_1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t = \mathbf{F}_2 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t$, kde $\boldsymbol{\Sigma}_t$ je nenulový tečný vektor k Σ_{12} . Platí také $\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}$. Oba integrály jsou stejné a $U_1(x, y) = U_2(x, y)$ pro všechna $[x, y] \in \Delta\Sigma_{12}$. Stejným způsobem připojujeme další souvislé komponenty $\Delta\bar{S}_1$ a $\Delta\bar{S}_2$. U lze spojitě definovat

$$U = \begin{cases} U_1 & \text{na } S_1, \\ U_1 = U_2 & \text{na } \Sigma_{12}, \\ U_2 & \text{na } S_2. \end{cases}$$

ii)

Existuje bod $[x_0, y_0] \in \Delta\Sigma_{12}$ takový, že $\mathbf{F}_{1t}(x_0, y_0) \neq \mathbf{F}_{2t}(x_0, y_0)$. \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 jsou spojitá na S_1 a S_2 , na \bar{S}_1 a \bar{S}_2 , na Σ_{12} . Existuje okolí $O_\epsilon(x_0, y_0) \cap \Delta\Sigma_{12}$ na kterém $\mathbf{F}_{1t} \neq \mathbf{F}_{2t}$ a $\mathbf{F}_1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t \neq \mathbf{F}_2 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t$. Nastavíme integrační konstanty U_1 a U_2 na $\Delta\bar{S}_1$ a $\Delta\bar{S}_2$ přiléhajících k $\Delta\Sigma_{12}$ tak, že $U_1(x_0, y_0) = U_2(x_0, y_0)$. Integrujeme U_1 a U_2 podél křivky $\Delta\Sigma_{12}$ z bodu $[x_0, y_0] \in \Delta\Sigma_{12}$ do bodu $[x, y] \in O_\epsilon(x_0, y_0) \cap \Delta\Sigma_{12} \setminus \{[x_0, y_0]\}$.

$$U_1(x, y) = U_1(x_0, y_0) + \int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r},$$

$$U_2(x, y) = U_2(x_0, y_0) + \int \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}, \quad d\mathbf{r} = [dx, dy].$$

Na okolí $O_\epsilon(x_0, y_0) \cap \Delta\Sigma_{12}$ je $\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} < \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}$ nebo $\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} > \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}$. $U_1(x, y) \neq U_2(x, y)$ na $O_\epsilon(x_0, y_0) \cap \Delta\Sigma_{12} \setminus \{[x_0, y_0]\}$. U nelze spojitě definovat na $S_1 \cup \Sigma_{12} \cup S_2$.

Věta 2 *Nechť množina S je jednoduše souvislá oblast v \mathbb{R}^2 . Filippovovo vektorové pole $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ je potenciální, právě když křivkový integrál tohoto vektorového pole nezávisí na cestě.*

Definice 4 *Nechť množina M je oblast v \mathbb{R}^2 . Nechť je dáno spojitě vektorové pole $\mathbf{V} : M \rightarrow \mathbb{R}^2$. Spojitě vektorové pole $\overline{\mathbf{V}} : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ je potenciální s potenciálem $U : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$, právě když spojitě vektorové pole $\mathbf{V} : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ je potenciální s potenciálem $U : M \rightarrow \mathbb{R}$ a \mathbf{V} lze spojitě rozšířit na \overline{M} a U lze spojitě rozšířit na \overline{M} .*

Lemma 2 *Nechť množina \overline{M} je uzavřená oblast v \mathbb{R}^2 . Spojitě vektorové pole $\overline{\mathbf{V}} : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ je potenciální, právě když křivkový integrál tohoto vektorového pole nezávisí na cestě.*

Důkaz Lemmatu 2

Jestliže $\overline{\mathbf{V}} : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ je potenciální, potom $\mathbf{V} : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ je potenciální. Zvolíme libovolnou uzavřenou křivku $\mathcal{L} \subset \overline{M}$. Vezmeme posloupnost uzavřených křivek $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3 \dots\}$, která konverguje k \mathcal{L} a všechny \mathcal{L}_i leží v M . Křivkový integrál podél \mathcal{L}_i je nulový. Vektorové pole $\overline{\mathbf{V}} : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ je spojitě, tedy limita posloupnosti křivkových integrálů podél \mathcal{L}_i se rovná křivkovému integrálu podél \mathcal{L} . Křivkový integrál podél \mathcal{L} je nulový. Křivkový integrál vektorového pole $\overline{\mathbf{V}} : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ nezávisí na cestě.

Jestliže $\overline{\mathbf{V}} : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ není potenciální, potom

1) $\mathbf{V} : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ není potenciální. Křivkový integrál vektorového pole $\overline{\mathbf{V}} : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ závisí na cestě.

2) $\mathbf{V} : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ nelze spojitě rozšířit na \overline{M} . Vektorové pole $\overline{\mathbf{V}} : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ neexistuje.

3) $U : M \rightarrow \mathbb{R}$ nelze spojitě rozšířit na \overline{M} . Zvolíme bod A ve vnitřku množiny \overline{M} . Zvolíme bod B na hranici množiny \overline{M} takový, že do něj nelze spojitě rozšířit $U : M \rightarrow \mathbb{R}$. Zvolíme dvě různé orientované křivky $\tilde{\mathcal{K}} \in \overline{M}$ a $\hat{\mathcal{K}} \in \overline{M}$ začínající v bodě A a končící v bodě B takové, že

$$\lim_{\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{K}}, \mathbf{x} \rightarrow B} U(\mathbf{x}) = \tilde{U}(B) \neq \hat{U}(B) = \lim_{\mathbf{x} \in \hat{\mathcal{K}}, \mathbf{x} \rightarrow B} U(\mathbf{x})$$

Křivkové integrály podél $\tilde{\mathcal{K}}$ a $\hat{\mathcal{K}}$ jsou

$$\begin{aligned} \tilde{U}(B) &= U(A) + \int_{\tilde{\mathcal{K}}} \overline{\mathbf{V}} \cdot d\mathbf{r}, \\ \hat{U}(B) &= U(A) + \int_{\hat{\mathcal{K}}} \overline{\mathbf{V}} \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

$\tilde{U}(B) \neq \hat{U}(B)$ a proto jsou křivkové integrály různé. Křivkový integrál vektorového pole $\overline{\mathbf{V}} : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ závisí na cestě.

Lemma 3 *Nechť P je souvislá podmnožina \mathbb{R}^2 . Nechť je dáno vektorové pole $\mathbf{P} : P \rightarrow \mathbb{R}^2$. Nechť \mathcal{J} je hladká křivka, $\mathcal{J} \subset P$. Nechť vektorové pole $\mathbf{Q} : P \rightarrow \mathbb{R}^2$ je*

$$\mathbf{Q} = \begin{cases} \mathbf{P} & \text{na } P \setminus \mathcal{J}, \\ \mathbf{P}_t & \text{na } \mathcal{J}, \end{cases}$$

kde \mathbf{P}_t je vektor, který má totožný kolmý průmět do tečného směru k \mathcal{J} jako vektor \mathbf{P} . Potom křivkový integrál z libovolného počátečního bodu A do libovolného koncového bodu B po libovolné integrační cestě \mathcal{K} je stejný v obou vektorových polích \mathbf{P} a \mathbf{Q} .

Důkaz Lemmatu 3

Průnik $\mathcal{J} \cap \mathcal{K}$ je tvořen izolovanými body $\mathbf{x} \in \mathcal{J}$ a úseky $u \subset \mathcal{J}$. Odlišné hodnoty vektorových polí \mathbf{P} a \mathbf{Q} v izolovaném bodě \mathbf{x} nemají vliv na hodnotu křivkového integrálu. Na úseku u jsou části křivkových integrálů

$$\int_u \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r},$$

$$\int_u \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{r}.$$

Na hladké křivce \mathcal{J} platí $\mathbf{P}_t = \mathbf{Q}_t$, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{J}_t = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{J}_t$, $\mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{r}$. Obě části křivkových integrálů jsou stejné. Nezáleží na tom, zda se integruje vektorové pole \mathbf{P} nebo \mathbf{Q} .

Lemma 4 *Nechť C je souvislá podmnožina \mathbb{R}^2 . Nechť křivkový integrál vektorového pole $\mathbf{C} : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ nezávisí na cestě. Nechť D je souvislá podmnožina \mathbb{R}^2 . Nechť křivkový integrál vektorového pole $\mathbf{D} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ nezávisí na cestě. Jestliže průnik $C \cap D$ je neprázdná souvislá množina a $C = D$ na $C \cap D$, potom křivkový integrál vektorového pole $\mathbf{E} : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ nezávisí na cestě.*

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{C} & \text{na } C \setminus D, \\ \mathbf{C} = \mathbf{D} & \text{na } C \cap D, \\ \mathbf{D} & \text{na } D \setminus C, \end{cases}$$

$$E = C \cup D.$$

Důkaz Lemmatu 4

Zvolíme libovolnou uzavřenou křivku $\mathcal{L} \subset E$.

- 1) \mathcal{L} leží celá v C , křivkový integrál podél ní je nulový.
- 2) \mathcal{L} leží celá v D , křivkový integrál podél ní je nulový.
- 3) \mathcal{L} začíná v bodě $\mathbf{x}_1 \in C \setminus D$, pokračuje svou orientovanou částí \mathcal{L}_1 do bodu $\mathbf{x}_2 \in C \cap D$, pokračuje svou orientovanou částí \mathcal{L}_2 do bodu $\mathbf{x}_3 \in D \setminus C$, pokračuje svou orientovanou částí \mathcal{L}_3 do bodu $\mathbf{x}_4 \in C \cap D$ a pokračuje svou orientovanou částí \mathcal{L}_4 do výchozího bodu $\mathbf{x}_1 \in C \setminus D$. Nechť z bodu \mathbf{x}_2 vychází orientovaná křivka \mathcal{P}_1 , která leží celá v $C \cap D$ a končí v bodě \mathbf{x}_4 . Uzavřená křivka tvořená orientovanými křivkami $\mathcal{L}_1, \mathcal{P}_1, \mathcal{L}_4$ leží celá v C a proto

$$\int_{\mathcal{L}_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{P}_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{L}_4} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Uzavřená křivka tvořená orientovanými křivkami $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{P}_1$ leží celá v D a proto

$$\int_{\mathcal{L}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{L}_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathcal{P}_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Sečtením rovnic dostáváme

$$\int_{\mathcal{L}_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{L}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{L}_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{L}_4} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Křivkový integrál podél uzavřené křivky \mathcal{L} je nulový.

- 4) \mathcal{L} má složitější průběh. Vhodným zavedením orientovaných křivek \mathcal{L}_i a \mathcal{P}_i lze tento případ převést na předchozí případy.

Křivkový integrál vektorového pole \mathbf{E} nezávisí na cestě.

Lemma 5 *Nechť množina S je jednoduše souvislá oblast v \mathbb{R}^2 . Nechť $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ je Filippovovo vektorové pole. Nechť v bodě $\mathbf{x} \in \Sigma_{12}$ jsou $\mathbf{F}_{1t}(\mathbf{x})$, $\mathbf{F}_{2t}(\mathbf{x})$, $\mathbf{G}_{12t}^s(\mathbf{x})$, $\mathbf{G}_{12t}^c(\mathbf{x})$ kolmé průměty vektorů $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{F}_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{G}_{12}^s(\mathbf{x})$, $\mathbf{G}_{12}^c(\mathbf{x})$ do tečného směru k Σ_{12} . Jestliže v daném bodě $\mathbf{x} \in \Sigma_{12}$ platí $\mathbf{F}_{1t}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_{2t}(\mathbf{x})$, potom platí $\mathbf{F}_{1t}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_{2t}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_{12t}^s(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_{12t}^c(\mathbf{x})$.*

Důkaz Lemmatu 5

Nechť $\mathbf{F}_{1t} = \mathbf{F}_{2t}$, potom podle Lemmatu 1 platí $\mathbf{F}_1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t = \mathbf{F}_2 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t$, kde $\boldsymbol{\Sigma}_t$ je nenulový tečný vektor k Σ_{12} . Pak protože $\mathbf{G}_{12}^s = \lambda \mathbf{F}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{F}_2$, je

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{12}^s \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t &= \lambda \mathbf{F}_1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t + (1 - \lambda) \mathbf{F}_2 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t \\ \mathbf{G}_{12}^s \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t &= \lambda \mathbf{F}_1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t + (1 - \lambda) \mathbf{F}_1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t \\ \mathbf{G}_{12t}^s &= \mathbf{F}_{1t}\end{aligned}$$

Obdobně protože $\mathbf{G}_{12}^c = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$, je

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{12}^c \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t &= \frac{1}{2} \mathbf{F}_1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t + \frac{1}{2} \mathbf{F}_2 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t \\ \mathbf{G}_{12}^c \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t &= \frac{1}{2} \mathbf{F}_1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t + \frac{1}{2} \mathbf{F}_1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t \\ \mathbf{G}_{12t}^c &= \mathbf{F}_{1t}\end{aligned}$$

Důkaz Věty 2

i)

Nechť Filippovovo vektorové pole $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ je potenciální.

$\mathbf{F}_1 : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lze spojitě rozšířit na \bar{S}_1 . Podle Věty 1 lze $U_1 : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě rozšířit na \bar{S}_1 . Podle Definice 4 je $\mathbf{F}_1 : \bar{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ potenciální s potenciálem $U_1 : \bar{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}$. Podle Lemmatu 2 křivkový integrál $\mathbf{F}_1 : \bar{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nezávisí na cestě.

$\mathbf{F}_2 : S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lze spojitě rozšířit na \bar{S}_2 . Podle Věty 1 lze $U_2 : S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě rozšířit na \bar{S}_2 . Podle Definice 4 je $\mathbf{F}_2 : \bar{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ potenciální s potenciálem $U_2 : \bar{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Podle Lemmatu 2 křivkový integrál $\mathbf{F}_2 : \bar{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nezávisí na cestě.

Uvažujeme $\Delta\Sigma_{12}$ jako souvislou komponentu množiny Σ_{12} , ΔS_1 jako souvislou komponentu množiny S_1 , $\Delta\bar{S}_1$ jako souvislou komponentu množiny \bar{S}_1 , ΔS_2 jako souvislou komponentu množiny S_2 , $\Delta\bar{S}_2$ jako souvislou komponentu množiny \bar{S}_2 .

Nechť vektorové pole $\Delta\tilde{\mathbf{F}}_1 : \Delta\bar{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je

$$\Delta\tilde{\mathbf{F}}_1 = \begin{cases} \mathbf{F}_1 & \text{na } \Delta S_1, \\ \mathbf{F}_{1t} & \text{na } \Delta\Sigma_{12}, \end{cases}$$

kde ΔS_1 a $\Delta\Sigma_{12}$ k sobě přiléhají. Podle Lemmatu 3 křivkový integrál $\Delta\tilde{\mathbf{F}}_1 : \Delta\bar{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nezávisí na cestě. Nechť vektorové pole $\Delta\tilde{\mathbf{F}}_2 : \Delta\bar{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je

$$\Delta\tilde{\mathbf{F}}_2 = \begin{cases} \mathbf{F}_2 & \text{na } \Delta S_2, \\ \mathbf{F}_{2t} & \text{na } \Delta\Sigma_{12}, \end{cases}$$

kde ΔS_2 a $\Delta\Sigma_{12}$ k sobě přiléhají. Podle Lemmatu 3 křivkový integrál $\Delta\tilde{\mathbf{F}}_2 : \Delta\bar{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nezávisí na cestě. Nechť vektorové pole $\Delta\tilde{\mathbf{F}} : \Delta S_1 \cup \Delta\Sigma_{12} \cup \Delta S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je

$$\Delta\tilde{\mathbf{F}} = \begin{cases} \mathbf{F}_1 & \text{na } \Delta S_1, \\ \mathbf{F}_{1t} = \mathbf{F}_{2t} & \text{na } \Delta\Sigma_{12}, \\ \mathbf{F}_2 & \text{na } \Delta S_2, \end{cases}$$

kde ΔS_1 , $\Delta\Sigma_{12}$, ΔS_2 k sobě přiléhají. Podle Lemmatu 4 křivkový integrál $\Delta\tilde{\mathbf{F}} : \Delta S_1 \cup \Delta\Sigma_{12} \cup \Delta S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nezávisí na cestě. Stejným způsobem připojujeme další souvislé komponenty $\Delta\bar{S}_1$ a $\Delta\bar{S}_2$. Dostaneme vektorové pole $\tilde{\mathbf{F}} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{cases} \mathbf{F}_1 & \text{na } S_1, \\ \mathbf{F}_{1t} = \mathbf{F}_{2t} & \text{na } \Sigma_{12}, \\ \mathbf{F}_2 & \text{na } S_2. \end{cases}$$

Křivkový integrál $\tilde{\mathbf{F}} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ nezávisí na cestě.

Podle Lemmatu 5 dostaneme vektorové pole $\widehat{\mathbf{F}} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\widehat{\mathbf{F}} = \begin{cases} \mathbf{F}_1 & \text{na } S_1, \\ \mathbf{F}_2 & \text{na } S_2, \\ \mathbf{G}_{12t}^s & \text{na } \Sigma_{12}^s, \\ \mathbf{G}_{12t}^c & \text{na } \Sigma_{12}^c. \end{cases}$$

Křivkový integrál $\widehat{\mathbf{F}} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ nezávisí na cestě. Podle Lemmatu 3 dostaneme Filippovo vektorové pole $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \mathbf{F}_1 & \text{na } S_1, \\ \mathbf{F}_2 & \text{na } S_2, \\ \mathbf{G}_{12}^s & \text{na } \Sigma_{12}^s, \\ \mathbf{G}_{12}^c & \text{na } \Sigma_{12}^c. \end{cases}$$

Křivkový integrál $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ nezávisí na cestě.

ii)

Nechť Filippovo vektorové pole $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ není potenciální. Potom

- 1) \mathbf{F}_1 není potenciální na S_1 . Křivkový integrál $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ závisí na cestě.
- 2) U_1 nelze spojitě rozšířit na \overline{S}_1 . Křivkový integrál $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ závisí na cestě.
- 3) \mathbf{F}_2 není potenciální na S_2 . Křivkový integrál $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ závisí na cestě.
- 4) U_2 nelze spojitě rozšířit na \overline{S}_2 . Křivkový integrál $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ závisí na cestě.
- 5) Existuje bod $[x_0, y_0] \in \Delta\Sigma_{12}$ takový, že $U_1(x_0, y_0) = U_2(x_0, y_0)$ a na jeho okolí $O_\epsilon(x_0, y_0) \cap \Delta\Sigma_{12} \setminus \{[x_0, y_0]\}$ platí $U_1(x, y) \neq U_2(x, y)$. Položíme bod $A = [x_0, y_0] \in \Delta\Sigma_{12}$. Zvolíme bod $B = [x, y] \in O_\epsilon(x_0, y_0) \cap \Delta\Sigma_{12} \setminus \{[x_0, y_0]\}$. Zvolíme dvě různé orientované křivky $\tilde{\mathcal{K}} \in \Delta\overline{S}_1$ a $\hat{\mathcal{K}} \in \Delta\overline{S}_2$ začínající v bodě A a končící v bodě B . Křivkové integrály podél $\tilde{\mathcal{K}}$ a $\hat{\mathcal{K}}$ jsou

$$U_1(B) = U_1(A) + \int_{\tilde{\mathcal{K}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

$$U_2(B) = U_2(A) + \int_{\hat{\mathcal{K}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

$U_1(A) = U_2(A)$, $U_1(B) \neq U_2(B)$ a proto jsou křivkové integrály různé. Křivkový integrál $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ závisí na cestě.

Věta 3 *Nechť množina S je jednoduše souvislá oblast v \mathbb{R}^2 . Nechť Filippovovo vektorové pole $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ je potenciální s potenciálem $U : S \rightarrow \mathbb{R}$. Potom spádnice grafu funkce U a neorientované trajektorie dynamického systému*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S,$$

jsou shodné.

Poznámka:

Spádová křivka topografické plochy je čára spojující body plochy ve směru jejího největšího spádu. Spádnice je kolmý průmět spádové křivky do vodorovné roviny.

Důkaz Věty 3

Pro trajektorii v S_1 je její tečný vektor vždy rovnoběžný s gradientem potenciálu.

Pro trajektorii v S_2 je její tečný vektor vždy rovnoběžný s gradientem potenciálu.

Na Σ_{12}^c trajektorie protne Σ_{12} v jednom izolovaném bodě. Na Σ_{12}^c má topografická plocha hřbetní křivku. Spádová křivka přejde přes hřbetní křivku v jednom izolovaném bodě. Spádnice protne Σ_{12} v jednom izolovaném bodě.

Na Σ_{12}^s se trajektorie pohybuje po Σ_{12} a je stabilní respektive nestabilní. Na Σ_{12}^s má topografická plocha hřebenovou respektive údolní hřbetní křivku. Spádová křivka se pohybuje po hřbetní křivce a je stabilní respektive nestabilní. Spádnice se pohybuje po Σ_{12} a je stabilní respektive nestabilní.

Definice 5 *Nechť množina S je jednoduše souvislá oblast v \mathbb{R}^2 . Filippovo vektorové pole $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ je Hamiltonovo, právě když existuje skalární funkce $H : S \rightarrow \mathbb{R}$, nazývaná Hamiltonián, taková, že*

$$\left[\frac{\partial H}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right] = \mathbf{F}_1(x, y), \quad \forall [x, y] \in S_1, \quad (4)$$

$$\left[\frac{\partial H}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right] = \mathbf{F}_2(x, y), \quad \forall [x, y] \in S_2, \quad (5)$$

$$H(x, y) \text{ je spojitá } \forall [x, y] \in \Sigma_{12}. \quad (6)$$

Věta 4 *Nechť množina S je jednoduše souvislá oblast v \mathbb{R}^2 . Filippovo vektorové pole $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ je Hamiltonovo, právě když*

- a) \mathbf{F}_1 je Hamiltonovo na S_1 a jeho Hamiltonián H_1 lze spojitě rozšířit na $\overline{S_1}$,
- b) \mathbf{F}_2 je Hamiltonovo na S_2 a jeho Hamiltonián H_2 lze spojitě rozšířit na $\overline{S_2}$,
- c) ve všech bodech $[x, y] \in \Sigma_{12}$ je kolmý průmět $\mathbf{F}_1(x, y)$ do normálového směru k Σ_{12} totožný s kolmým průmětem $\mathbf{F}_2(x, y)$ do téhož směru.

Důkaz Věty 4

Uvažujeme dvě Filippova vektorová pole $\mathbf{L} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{L} = [L_a, L_b]$ a $\mathbf{R} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{R} = [R_a, R_b]$ taková, že $L_b = R_a$, $L_a = -R_b$. Podle Definice 3 a Definice 5 platí ekvivalence: \mathbf{L} je potenciální s potenciálem U_L , právě když \mathbf{R} je Hamiltonovo s Hamiltoniánem H_R , přičemž $U_L = H_R + K$, kde K je konstanta, $K \in \mathbb{R}$.

Pro \mathbf{R} ve Větě 4 platí tvrzení a), právě když pro \mathbf{L} ve Větě 1 platí tvrzení a).

Pro \mathbf{R} ve Větě 4 platí tvrzení b), právě když pro \mathbf{L} ve Větě 1 platí tvrzení b).

Pro \mathbf{R} ve Větě 4 platí tvrzení c), právě když pro \mathbf{L} ve Větě 1 platí tvrzení c).

Věta 5 *Nechť množina S je jednoduše souvislá oblast v \mathbb{R}^2 . Nechť Filippovo vektorové pole $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ je Hamiltonovo s Hamiltoniánem $H : S \rightarrow \mathbb{R}$. Potom vrstevnice grafu funkce H a neorientované trajektorie dynamického systému*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S,$$

jsou shodné.

Poznámka:

Vrstevná křivka topografické plochy je čára spojující body této plochy, které mají stejnou nadmořskou výšku. Vrstevnice je kolmý průmět vrstevné křivky do vodorovné roviny.

Důkaz Věty 5

Pro trajektorii v S_1 je její tečný vektor vždy kolmý ke gradientu Hamiltoniánu.

Pro trajektorii v S_2 je její tečný vektor vždy kolmý ke gradientu Hamiltoniánu.

Na Σ_{12}^c trajektorie protne Σ_{12} v jednom izolovaném bodě. Na Σ_{12}^c má topografická plocha hřbetní křivku. Vrstevná křivka přejde přes hřbetní křivku v jednom izolovaném bodě. Vrstevnice protne Σ_{12} v jednom izolovaném bodě.

Je-li Filippovo vektorové pole Hamiltonovo a objeví-li se v tomto vektorovém poli Σ_{12}^s , potom na Σ_{12}^s selhává Filippova konvexní metoda, $\lambda = \frac{0}{0}$.

Definice 6 *Nechť množina S je jednoduše souvislá oblast v \mathbb{R}^2 . Řekneme, že Filippovo vektorové pole $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ má na okolí $O_\nu(\mathbf{x}_0)$ bodu $\mathbf{x}_0 \in \Sigma_{12}$ Ljapunovovu funkci $L : O_\nu(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}$, právě když existuje skalární funkce $L : O_\nu(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že*

$$L \text{ je spojitá na } O_\nu(\mathbf{x}_0), \quad (7)$$

$$L \text{ je diferencovatelná na } O_\nu(\mathbf{x}_0) \setminus \Sigma_{12}, \quad (8)$$

$$L(\mathbf{x}_0) < L(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in O_\nu(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}, \quad (9)$$

$$\left[\frac{\partial(-L)}{\partial x}(x, y), \frac{\partial(-L)}{\partial y}(x, y) \right]^* \cdot \mathbf{F}(x, y) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in O_\nu(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}, \quad (10)$$

kde $*$ znamená obecný gradient - vektor ve směru maximální směrové derivace, o velikosti této směrové derivace.

Věta 6 *Nechť množina S je jednoduše souvislá oblast v \mathbb{R}^2 . Nechť Filippovovo vektorové pole $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ má na okolí $O_\nu(\mathbf{x}_0)$ bodu $\mathbf{x}_0 \in S$ Ljapunovovu funkci $L : O_\nu(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Potom bod \mathbf{x}_0 je asymptoticky stabilní rovnovážný stav dynamického systému*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S.$$

Důkaz Věty 6

Nechť existuje Ljapunovova funkce $L : O_\nu(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Z podmínek Definice 6 vyplývá, že funkční hodnota L klesá podél všech částí trajektorií, které se nacházejí v $O_\nu(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$. Důkaz stejný jako důkaz pro spojitě vektorové pole a spojitý dynamický systém. Konkrétní důkazy pro spojitá vektorová pole a spojitě dynamické systémy lze nalézt v Lyapunov A. M.: *The general problem of stability of motion*. Taylor & Francis, 1992.

3 Aplikace Filippovových systémů

1) **Chemický reaktor s přepadem**, CSTR, continuous stirred - tank reactor, jehož objem, tedy výška hladiny, je regulován pasivně přepadem umístěným v pevné výši nade dnem. Modelové rovnice jsou

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= F_{in} - p\sqrt{V - V_c} \\ \frac{dc_A}{dt} &= \frac{F_{in}c_{Ain}}{V} - \frac{F_{in}c_A}{V} - kc_A \quad V > V_c, \\ \frac{dV}{dt} &= F_{in} \\ \frac{dc_A}{dt} &= \frac{F_{in}c_{Ain}}{V} - \frac{F_{in}c_A}{V} - kc_A \quad V < V_c. \end{aligned} \quad (11)$$

Parametrická studie

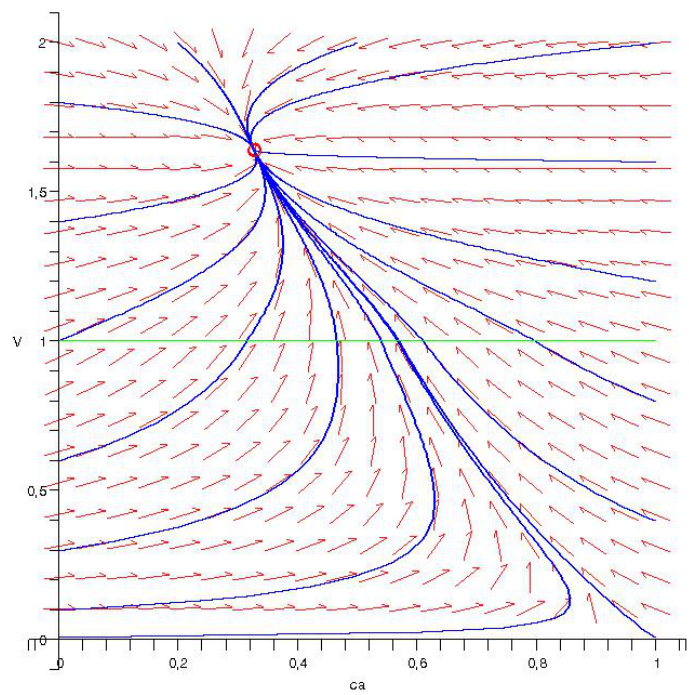
Pevné parametry jsou

$$c_{Ain} = 1 \text{ kmol m}^{-3}, \quad F_{in} = 0.8 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}, \quad k = 1 \text{ h}^{-1}, \quad V_c = 1 \text{ m}^3.$$

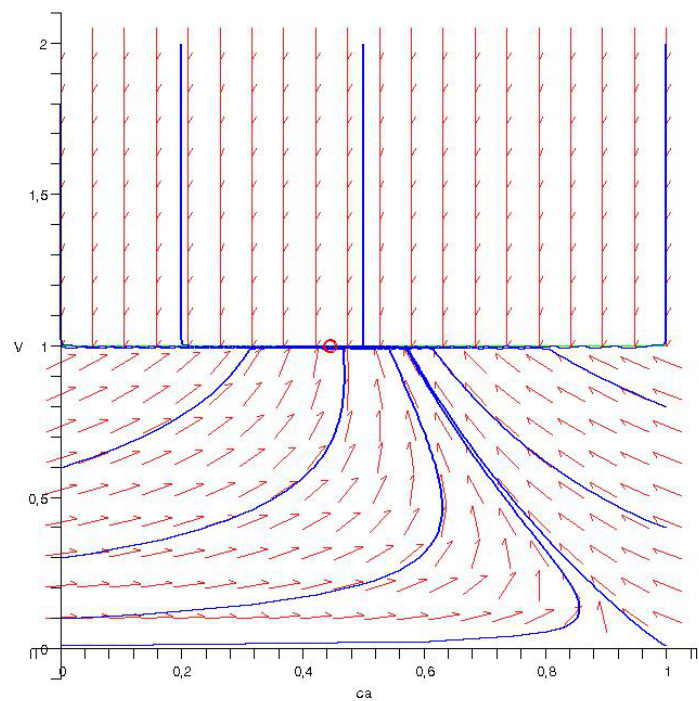
Pohyblivý parametr je

$$p \in \langle 1, \infty \rangle \text{ m}^{\frac{3}{2}} \text{ h}^{-1}. \quad (12)$$

Rovnovážný stav \circ je v oblasti $V > V_c$, hladina se ustaluje nad úrovní přepadu. Se zvyšující se hodnotou parametru p se hladina ustaluje stále níž a níž. Pro nekonečnou hodnotu parametru p má odtok nekonečnou kapacitu a hladina se ustálí v úrovni přepadu, rovnovážný stav \circ se dostane na hranici $V = V_c$. Se zvyšující se hodnotou p jsou strmější trajektorie v oblasti $V > V_c$, tedy převládají objemové změny nad změnami koncentračními.



Obrázek 1 Fázový portrét, $p = 1 \text{ m}^{\frac{3}{2}} \text{ h}^{-1}$.



Obrázek 2 Fázový portrét, $p \rightarrow \infty \text{ m}^{\frac{3}{2}} \text{ h}^{-1}$.

2) **Chemický reaktor s čerpadlem**, CSTR, jehož objem, tedy výška hladiny, je regulován aktivně pomocí čerpadla a snímače výšky hladiny. Modelové rovnice jsou

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= F_{in} - F_{out} \\
 \frac{dc_A}{dt} &= \frac{F_{in}c_{Ain}}{V} - \frac{F_{in}c_A}{V} - kc_A \quad V > V_c, \\
 \frac{dV}{dt} &= F_{in} \\
 \frac{dc_A}{dt} &= \frac{F_{in}c_{Ain}}{V} - \frac{F_{in}c_A}{V} - kc_A \quad V < V_c.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Parametrická studie

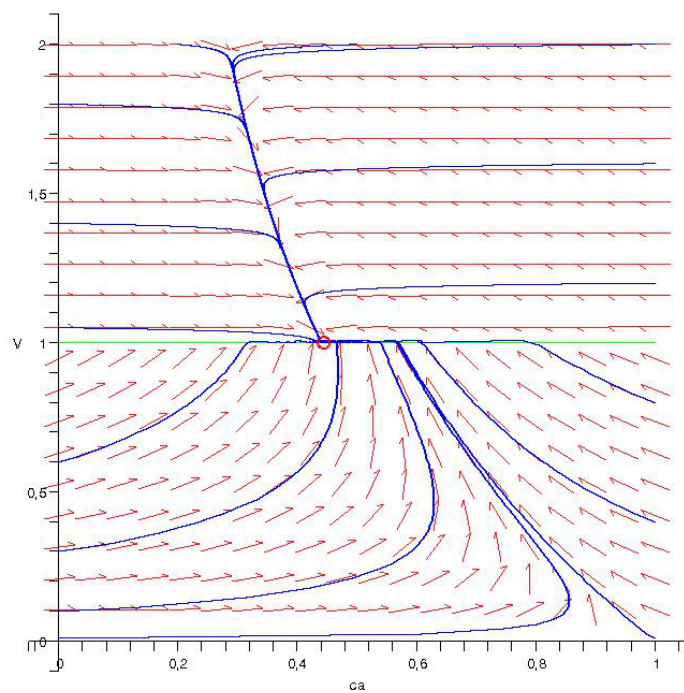
Pevné parametry jsou

$$c_{Ain} = 1 \text{ kmol m}^{-3}, \quad F_{in} = 0.8 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}, \quad k = 1 \text{ h}^{-1}, \quad V_c = 1 \text{ m}^3.$$

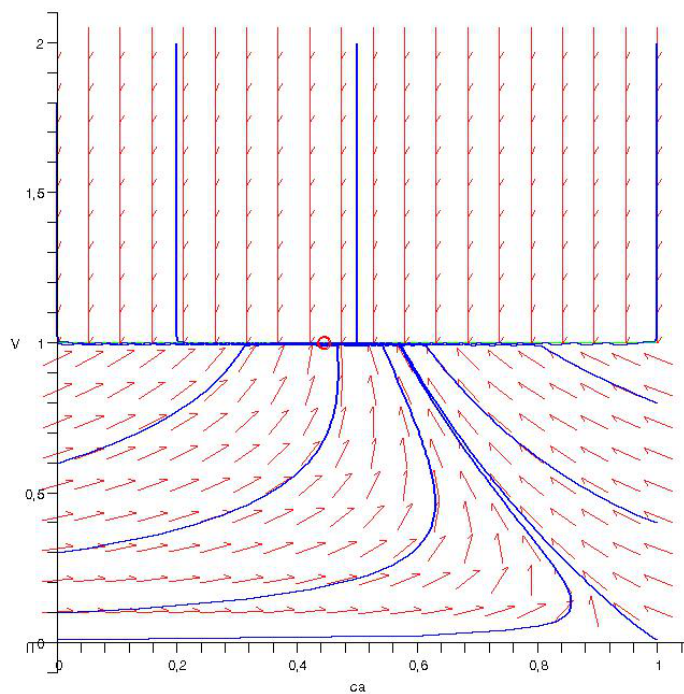
Pohyblivý parametr je

$$F_{out} \in (0.82, \infty) \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}. \tag{14}$$

Rovnovážný stav \circ je na hranici $V = V_c$, hladina se ustaluje na regulované úrovni. Se zvyšujícím se objemovým tokem čerpadlem F_{out} jsou strmější trajektorie v oblasti $V > V_c$, tedy převládají objemové změny nad změnami koncentracními.

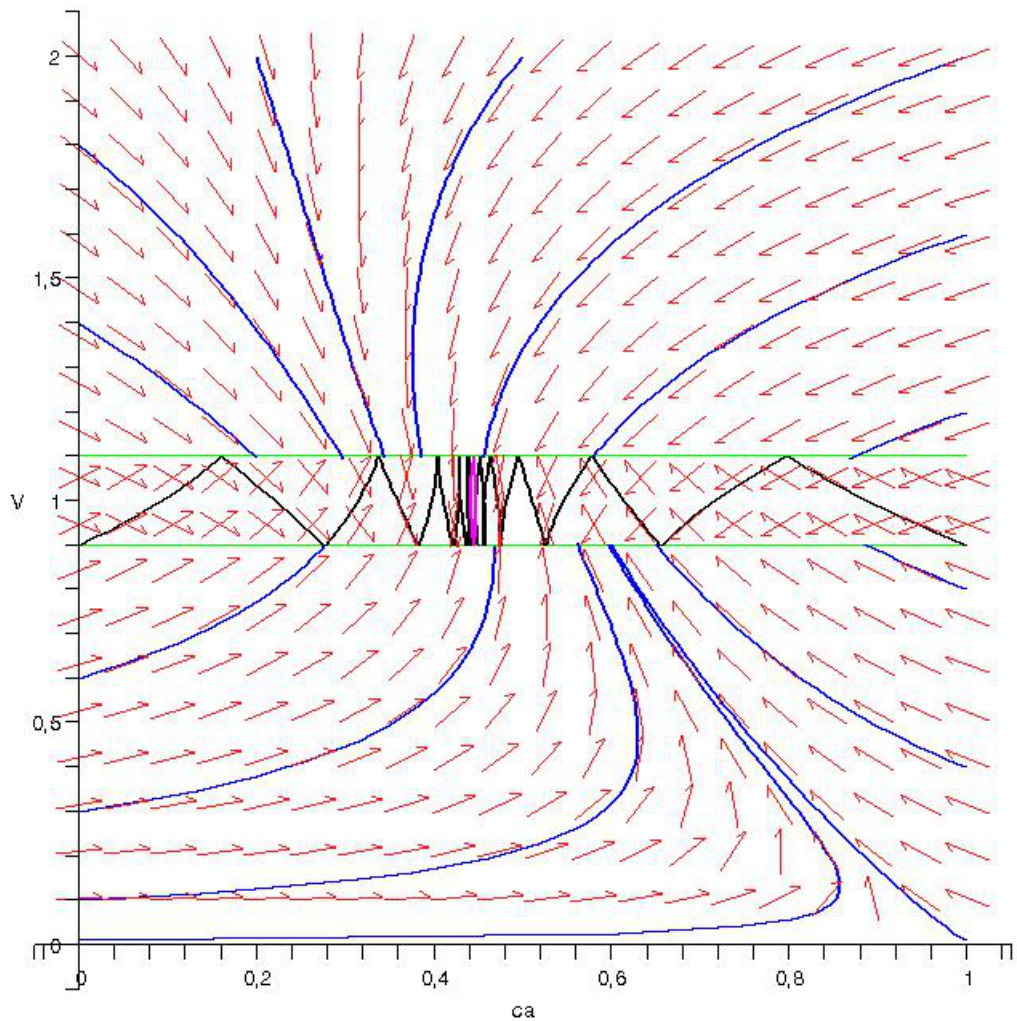


Obrázek 3 Fázový portrét, $F_{out} = 0.82 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$.



Obrázek 4 Fázový portrét, $F_{out} \rightarrow \infty \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$.

3) Chemický reaktor s čerpadlem, CSTR, jehož objem, tedy výška hladiny, je regulován aktivně pomocí čerpadla a snímače výšky hladiny se spínací hysterezí. Objem je regulován s regulační odchylkou δ . Čerpadlo se zapíná, když objem náplně reaktoru dosáhne hodnoty $V = V_c + \delta$. Čerpadlo se vypíná, když objem náplně reaktoru klesne na hodnotu $V = V_c - \delta$.



Obrázek 5 Fázový portrét systému (13) pro hodnotu $\delta = 0.1 \text{ m}^3$.

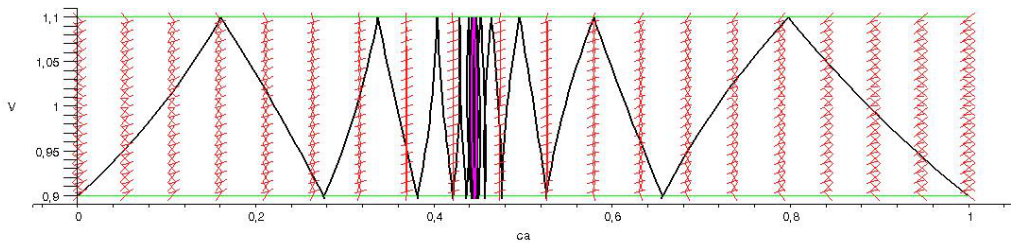
Nejedná se o Filippovův systém v pravém slova smyslu. V hysterezním pásu jsou definována dvě různá vektorová pole. Podle posledního průchodu trajektorie horní či dolní hranicí je určeno, kterým vektorovým polem se trajektorie řídí. Stav systému dospěje k limitnímu cyklu uvnitř hysterezního pásu.

Parametrická studie

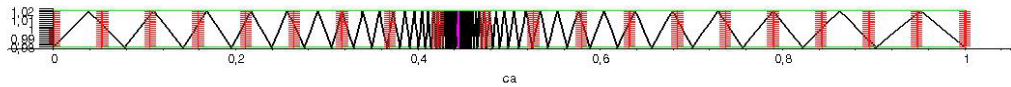
Pevné parametry jsou

$$c_{Ain} = 1 \text{ kmol m}^{-3}, \quad F_{in} = 0.8 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}, \quad F_{out} = 1.5 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}, \quad k = 1 \text{ h}^{-1}, \quad V_c = 1 \text{ m}^3.$$

S klesající regulační odchylkou δ se hysterezní pás zužuje, počet zapnutí a vypnutí čerpadla za časovou jednotku stoupá a velikost limitního cyklu se zmenšuje. V limitě $\delta \rightarrow 0 \text{ m}^3$ přejde limitní cyklus v rovnovážný stav.



Obrázek 6 Fázový portrét, $\delta = 0.1 \text{ m}^3$.



Obrázek 7 Fázový portrét, $\delta = 0.02 \text{ m}^3$.

4) Modifikovaný Bazykinův ekologický model má rovnice

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 - x_1^2 - \frac{ax_1x_2}{b+x_1} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{ax_1x_2}{b+x_1} - dx_2 - Ex_2 \quad x_2 > \alpha, \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_1 - x_1^2 - \frac{ax_1x_2}{b+x_1} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{ax_1x_2}{b+x_1} - dx_2 \quad x_2 < \alpha, \end{aligned} \tag{15}$$

s proměnnými $x_1 \in \langle 0, \infty \rangle$, $x_2 \in \langle 0, \infty \rangle$ a parametry $a > 0$, $b > 0$, $d > 0$, $E > 0$, $\alpha > 0$. Kuznetsov Y. A., Rinaldi S., Gragnani A.: *One-parameter bifurcations in planar Filippov systems*. Int. j. bifurcation and chaos, 2157-2188, 2003.

Jednparametrická studie

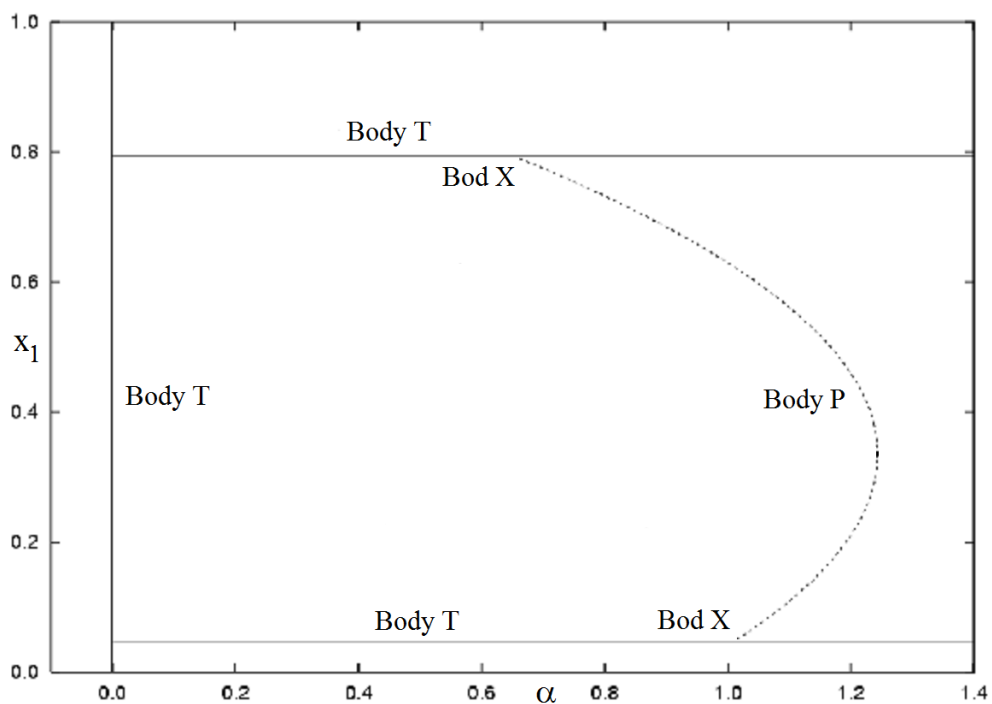
Pevné parametry jsou

$$a = 0.3556, \quad b = 0.33, \quad d = 0.0444, \quad E = 0.2067.$$

Pohyblivý parametr je

$$\alpha \in (0, 1.4). \quad (16)$$

Body P jsou generické rovnovážné stavy na hranici, generic pseudoequilibria. Body T jsou tečné body, tangent points. Diagram řešení, který zachycuje závislost souřadnice x_1 bodů P a T na hodnotě parametru α .



Obrázek 8 Jednparametrická studie - diagram řešení.

Dvouparametrická studie

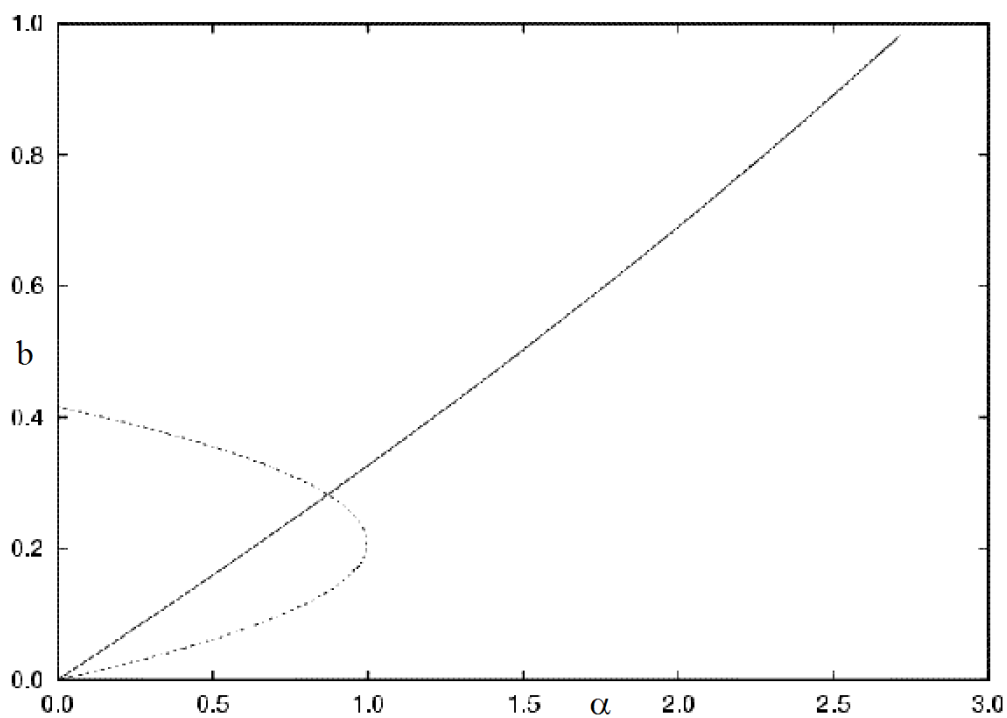
Pevné parametry jsou

$$a = 0.3556, \quad d = 0.0444, \quad E = 0.2067. \quad (17)$$

Pohyblivé parametry jsou

$$\alpha \in \langle 0, 3 \rangle, \quad \beta \in \langle 0, 1 \rangle \quad (18)$$

Body X jsou singulární rovnovážné stavy na hranici, singular pseudoequilibria. Bifurkační diagram, který ukazuje, při jakých hodnotách parametrů α , b , se objeví body X.



Obrázek 9 Dvouparametrická studie - bifurkační diagram.

4 Závěr

Ukázali jsme, že pojmy potenciál, Hamiltonián a Ljapunovova funkce lze definovat, ačkoliv vektorové pole je spojitě po částech a v některých bodech není diferencovatelné.

Hlavním přínosem autora práce jsou formulace a důkazy vět:

- Věty 1, 2, 3 o existenci a vlastnostech potenciálu planárního Filippovova systému.
- Věty 4, 5, které se zabývají Hamiltoniánem planárního Filippovova systému.
- Věta 6, která uvádí postačující podmínky pro asymptotickou stabilitu rovnovážného stavu planárního Filippovova systému.

Potenciální a Hamiltonova vektorová pole tvoří podmnožinu množiny všech vektorových polí. Avšak mnoho fyzikálních vektorových polí jsou pole potenciální či Hamiltonova. Znalost potenciálu usnadňuje výpočet křivkových integrálů, tedy práce sil, vektorových polí. Znalost Hamiltoniánu zpřesňuje výpočet trajektorií dynamických systémů, metodami typu prediktor-korektor.

Zvolili jsme příklady z chemického inženýrství a biologie, na které aplikujeme teorii Filippovových systémů. Konkrétně modelujeme chemický reaktor s přepadem. Chování odpovídajícího dynamického systému je složitější, připojíme-li k reaktoru čerpadlo. Model zapínání a vypínání čerpadla vede ke spínací hysterezi. Ukázali jsme, že výsledný dynamický systém není Filippovův systém v pravém slova smyslu.

Poslední uvedenou aplikací je Bazykinův ekologický model. Uvádíme jednoparametrickou a dvouparametrickou studii jeho chování.

Nespojitě dynamické systémy poskytují mnoho otevřených problémů. Z hlediska aplikací můžeme tuto teorii využít například pro modelování syntézy proteinů v případě deficitu některé aminokyseliny.