ODR okrajová úloha – Metoda sítí

Na intervalu $\langle a, b \rangle$ je dána diferenciální rovnice 2. řádu

$$y'' = f(x, y, y')$$

se separovanými okrajovými podmínkami

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1 \tag{1}$$
$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2 \,. \tag{2}$$

Předpokládejte, že f je obecná funkce tří proměnných spojitá a spojitě diferencovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 jsou zadané konstanty. Tuto okrajovou úlohu pro diferenciální rovnici druhého řádu na intervalu $\langle a\,, b\rangle$ řešíme metodou sítí. Na řešení diferenčních rovnic použijeme

1. metodu postupných aproximací
2. Newtonovu metodu.

Na intervalu $\langle a\,, b\rangle$ zvolíme síť $n+1$ ekvidistantních bodů s krokem h, tj.

$$x_i = a + i\,h\,, \quad i = 0, \ldots, n, \qquad h = \frac{b-a}{n}\,.$$

Přibližné hodnoty řešení okrajové úlohy v bodech sítě $y(x_i)$ značíme y_i, $i = 0, \ldots, n$.
Diskretizací diferenciální rovnice dostáváme

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right)\,,$$

tj.

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = \alpha\, f\left(x_i, y_i, \beta(y_{i+1} - y_{i-1})\right)\,, \quad i = 1, \ldots, n-1\,, \tag{3}$$

kde $\alpha = h^2$ a $\beta = \frac{1}{2h}$.
Hodnoty řešení $y(x)$ v krajních bodech intervalu $\langle a\,, b\rangle$ jsou svázány okrajovými podmínkami (1) a (2). Tyto přibližně nahradíme např. takto

$$\alpha_1\, y_0 + \frac{\beta_1}{2h}\,(-3y_0 + 4y_1 - y_2) = \gamma_1$$

$$\alpha_2\, y_n + \frac{\beta_2}{2h}\,(y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n) = \gamma_2\,,$$

označme $c = \frac{\beta_1}{2h}$ a $d = \frac{\beta_2}{2h}$, potom po úpravě dostáváme

$$(\alpha_1 - 3\,c)\,y_0 + 4c\,y_1 - c\,y_2 = \gamma_1 \tag{4}$$

$$(\alpha_2 + 3\,d)\,y_n - 4\,d\,y_{n-1} + d\,y_{n-2} = \gamma_2\,. \tag{5}$$

Dále označíme $p = 1/(\alpha_1 - 3c)\,, \quad q = 1/(\alpha_2 + 3d)$ a vyjádříme y_0, y_n

$$y_0 = p(c\,y_2 - 4c\,y_1 + \gamma_1) \tag{6}$$

$$y_n = q(4d\,y_{n-1} - d\,y_{n-2} + \gamma_2)\,. \tag{7}$$

Výraz (6) dosadíme do rovnice (3) pro $i = 1$. Po úpravě dostáváme

$$-(4c\,p + 2)y_1 + (1 + p\,c)y_2 = \alpha\, f\left(x_1, y_1, \beta((1 - c\,p)y_2 + 4c\,p\,y_1 - p\,\gamma_1)\right) - p\,\gamma_1 \tag{8}$$

Stejně tak (7) dosadíme do rovnice (3) pro $i = n-1$ a dostáváme

$$(1-q\,d)y_{n-2} + (4d\,q-2)y_{n-1} = \alpha\, f\,(x_{n-1}, y_{n-1}, \beta(-(1+d\,q)y_{n-2} + 4d\,q\,y_{n-1} + q\,\gamma_2)) - q\,\gamma_2 \tag{9}$$

1. Metoda postupných aproximací: Soustavu (8), (3) pro $i = 2\ldots n-2$ a (9) budeme řešit metodou postupných aproximací. Vektor neznámých označíme $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1})^\top$, soustavu rovnic lze zapsat maticově

$$A\boldsymbol{y}^{k+1} = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{y}^k)\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} -(2+4c\,p) & (1+c\,p) & 0 & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & 0 & (1-d\,q) & (4d\,q-2) \end{bmatrix} \qquad \text{je typu}\,(n-1)\times(n-1),$$

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \alpha\, f\,(x_1, y_1, \beta((1 - c\,p)y_2 + 4c\,p\,y_1 - p\,\gamma_1)) - p\,\gamma_1 \\ \alpha\, f\,(x_2, y_2, \beta(y_3 - y_1)) \\ \vdots \\ \alpha\, f\,(x_{n-2}, y_{n-2}, \beta(y_{n-1} - y_{n-3})) \\ \alpha\, f\,(x_{n-1}, y_{n-1}, \beta(-(1 + d\,q)y_{n-2} + 4d\,q\,y_{n-1} + q\,\gamma_2)) - q\,\gamma_2 \end{bmatrix} .$$

Výchozí aproximaci $\boldsymbol{y}^0$ volíme například tak, aby splňovala okrajové podmínky. Výpočet provádíme dokud neplatí

$$\left|\left|\boldsymbol{y}^{k+1} - \boldsymbol{y}^k\right|\right| < \varepsilon\ .$$

pro předem zvolenou přesnost ε.

2. Newtonova metoda: Soustavu (8), (3) pro $i = 2 \ldots n-2$ a, (9) budeme řešit Newtonovou metodou. Soustavu rovnic lze zapsat vektorově

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}\,, \tag{10}$$

kde

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y}) = (\Phi_1(\boldsymbol{y}), \ldots, \Phi_{n-1}(\boldsymbol{y}))^\top$$

a

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\boldsymbol{y}) &= (4c\,p+2)y_1-(1+p\,c)y_2+\alpha\, f\,(x_1,y_1,\beta((1-c\,p)y_2+4c\,p\,y_1-p\,\gamma_1))-p\,\gamma_1 && (11)\\
\Phi_i(\boldsymbol{y}) &= y_{i-1}-2y_i+\ y_{i+1}-\alpha\, f\,(x_i,y_i,\beta(y_{i+1}-y_{i-1}))\ , \qquad i=2,\ldots,n-2\,, && (12)\\
\Phi_{n-1}(\boldsymbol{y}) &= -(1-q\,d)y_{n-2}-(4d\,q-2)y_{n-1}+\alpha\, f\,(x_{n-1},y_{n-1},\beta(-(1+d\,q)y_{n-2}+4d\,q\,y_{n-1}+q\,\gamma_2))-q\,\gamma_2\,. && (13)
\end{aligned}$$

Rovnici (10) řešíme Newtonovou metodou. Nejdříve zvolíme počáteční přiblížení $\boldsymbol{y}^0=(y_1^0,\ldots,y_{n-1}^0)$ hodnot y_i , Další aproximace vypočteme ze vztahu

$$\boldsymbol{y}^{k+1}=\boldsymbol{y}^k+\boldsymbol{\Delta}^k\,,\quad k=0,1,2\ldots\,,$$

kde $\boldsymbol{\Delta}^k$ řeší

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{y}^k)\,\boldsymbol{\Delta}^k=-\,\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y}^k)\,,\quad k=0,1,2\ldots$$

a $\mathbf{J}(\boldsymbol{y})=\dfrac{\partial\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{y}}$ je Jacobiho matice.
Jacobiho matice

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{y}^k)=\begin{bmatrix}
B_1 & C_1 & 0 & & 0\\
A_2 & B_2 & C_2 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & A_{n-2} & B_{n-2} & C_{n-2}\\
0 & & 0 & A_{n-1} & B_{n-1}
\end{bmatrix},$$

je třídiagonální matice, kde

$$B_1=(4\,c\,p+2)+\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial y}\,(x_1,y_1,\beta(1-c\,p)y_2+4c\,p\,y_1-p\,\gamma_1)+\frac{\partial f}{\partial z}\,(x_1,y_1,\beta(1-c\,p)y_2+4c\,p\,y_1-p\,\gamma_1)\,4\beta c\,p\right),$$

$$C_1 = -(1+p\,c) + \alpha\,\frac{\partial f}{\partial z}\,(x_1, y_1, \beta(1-c\,p)y_2 + 4c\,p\,y_1 - p\,\gamma_1)\,(\beta(1-c\,p)),$$

pro $i = 2, \dots, n-2$ je

$$A_i = 1 + \alpha\frac{\partial f}{\partial z}\,(x_i, y_i, \beta(y_{i+1} - y_{i-1}))\,\beta, \quad B_i = -2 - \alpha\frac{\partial f}{\partial y}\,(x_i, y_i, \beta(y_{i+1} - y_{i-1}))\,, \quad C_i = 1 - \alpha\frac{\partial f}{\partial z}\,(x_i, y_i, \beta(y_{i+1} - y_{i-1}))\,\beta,$$

a

$$A_{n-1} = -(1-q\,d) + \alpha\,\frac{\partial f}{\partial z}\,(x_{n-1}, y_{n-1}, \beta(-(1+d\,q)y_{n-2} + 4d\,q\,y_{n-1} + q\,\gamma_2))\,(-\beta(1+d\,q)),$$

$$B_{n-1} = (2-4\,d\,q) + \alpha\left(\frac{\partial f}{\partial y}\,(x_{n-1}, y_{n-1}, \beta(-(1+d\,q)y_{n-2} + 4\,d\,q\,y_{n-1} + q\,\gamma_2)) + \frac{\partial f}{\partial z}\,(x_{n-1}, y_{n-1}, \beta(-(1+d\,q)y_{n-2} + 4\,d\,q\,y_{n-1} + q\,\gamma_2))\,4\,d\,q\,\beta\right)$$

Počáteční přiblížení $\boldsymbol{y}^0 = (y_0^0, \dots, y_n^0)$ volíme tak, aby hodnoty y_j^0 splňovaly okrajové podmínky.