Okrajová úloha pro ODR, metoda střelby

Soustava dvou diferenciálních rovnic

Je dána obecná soustava diferenciálních rovnic 1. řádu

$$y_1' = f(x, y_1, y_2) \tag{1}$$
$$y_2' = g(x, y_1, y_2) \tag{2}$$

se separovanými okrajovými podmínkami

$$\alpha_0 y_1(a) + \beta_0 y_2(a) = \gamma_0 \tag{3}$$
$$\alpha_1 y_1(b) + \beta_1 y_2(b) = \gamma_1\,, \tag{4}$$

kterou řešíme na intervalu $\langle a\,; b\rangle$.

Metoda střelby pomocí variačních proměnných

Okrajovou úlohu převedeme na posloupnost počátečních úloh se zvolenou počáteční podmínkou v některém krajním bodě intervalu. Zvolme, bez újmy na obecnosti, krajním bodem bod a .
Za předpokladu, že $\beta_0 \neq 0$, hodnotu $y_1(a)$ položíme rovné nějakému η (počáteční nástřel) a z rovnice (3) dopočítáme zbývající počáteční podmínku $y_2(a)$, tj.

$$y_1(a) = \eta\,, \tag{5}$$
$$y_2(a) = \frac{\gamma_0 - \alpha_0 \eta}{\beta_0}\,. \tag{6}$$

Tak získáme počáteční úlohu pro soustavu dvou diferenciálních rovnic (1), (2) s počátečními podmínkami (5), (6). Budeme požadovat, aby iterace řešení těchto počátečních úloh (danými hodnotami η) konvergovala k řešení, které splňuje okrajové podmínky v obou krajních bodech (tj. i v bodě b okrajovou podmínku (4)).

1) Řešit úlohu pomocí variačních proměnných znamená přidat, pomocí variačních proměnných

$$p_1 = \frac{\partial y_1}{\partial \eta}\,, \quad p_2 = \frac{\partial y_2}{\partial \eta}\,,$$

dvě nové diferenciální rovnice

$$p_1' = \frac{\partial f}{\partial y_1} p_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} p_2 \tag{7}$$

$$p_2' = \frac{\partial g}{\partial y_1} p_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2} p_2\,, \tag{8}$$

s počátečními podmínkami.

$$p_1(0) = 1 \tag{9}$$

$$p_2(0) = -\frac{\alpha_0}{\beta_0}\,. \tag{10}$$

Dostáváme počáteční úlohu pro 4 diferenciální rovnice (1), (2), (7), (8) s počátečními podmínkami (5), (6), (9), (10).

2) Pomocí některé z metod pro řešení počáteční úlohy (např. Rungova Kuttova typu) získáme (pro zvolené η) přibližné řešení počáteční úlohy, tj. funkce y_1, y_2, p_1, p_2 v bodech dělení intervalu $\langle a\,; b\rangle$. Pokud neplatí okrajová podmínka (4), znamená to, že je třeba najít nové η, aby přibližně splňovalo nelineární rovnici

$$\varphi(\eta) = 0\,, \quad \text{kde} \quad \varphi(\eta) = \alpha_1 y_1(b,\eta) + \beta_1 y_2(b,\eta) - \gamma_1\,. \tag{11}$$

Na hledání kořene funkce φ lze použít některou iterační metodu. Řešení pomocí variačních proměnných usnadňuje aplikovat Newtonovu metodu.

3) Odhad počáteční hodnoty η opravíme pomocí Newtonovy metody vypočítáním nové iterace η^{Nov} ze staré hodnoty $\eta^{St} = \eta$ následovně:

$$\eta^{Nov} = \eta^{St} - \frac{\varphi(\eta^{St})}{\varphi'(\eta^{St})}. \tag{12}$$

Dosadíme-li derivaci funkce $\varphi(\eta)$, tj.

$$\varphi'(\eta) = \alpha_1 p_1(b,\eta) + \beta_1 p_2(b,\eta)$$

do (12) bude:

$$\eta^{Nov} = \eta^{St} - \frac{\alpha_1 y_1(b,\eta^{St}) + \beta_1 y_2(b,\eta^{St}) - \gamma_1}{\alpha_1 p_1(b,\eta^{St}) + \beta_1 p_2(b,\eta^{St})}\,. \tag{13}$$

Kroky 1) – 3) provádíme tak dlouho, dokud dvě následující aproximace nejsou dostatečně blízké, ve smyslu $\left|\eta^{Nov} - \eta^{St}\right|$, tj. dokud není pro η přibližně splněna okrajová podmínka (4). Pro takto získané $\eta = \eta^{Nov}$ řešíme počáteční úlohu jen pro 2 diferenciální rovnice (1), (2) s podmínkami (5), (6).
Diskrétní přibližné hodnoty funkcí $y_1\, y_2$, získané např. RK–metodou v bodech dělení $x_i,\ i = 0,\dots,N$ intervalu $\langle a\,;b\rangle$, budou výsledným přibližným řešením dané okrajové úlohy (1) – (4).