PDR parabolického typu– implicitní metoda sítí (Crank-Nicolson)

Rovnice

Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle a; b\rangle,\ t \geq 0\}$ je dána PDR

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t,u) \tag{1}$$

s počáteční podmínkou

$$u(x,0) \ = \ \varphi(x) \tag{2}$$

a okrajovými podmínkami

$$\alpha 1\, u(a,t) + \beta 1(t)\frac{\partial u}{\partial x}(a,t) \ = \ \gamma 1(t) \tag{3}$$

$$\alpha 2\, u(b,t) + \beta 2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(b,t) \ = \ \gamma 2(t) \tag{4}$$

C – N formule

Při řešení úlohy pomocí formule Cranka–Nicolsonové (C–N) nejdříve k daným krokům h ve směru osy x a k ve směru osy t vytvoříme síť množiny D $D_{h,k}$ s uzly $[x_i, t_j]$, kde

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,, \qquad & x_{i+1} = x_i + h\,, \quad h = \tfrac{1}{n} \\ 0 &= t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\,, \qquad & t_{j+1} = t_j + k\,, \quad k = \tfrac{T}{m}\,. \end{aligned}$$

Označíme $\alpha = \dfrac{k}{2h^2}$, $\beta = \dfrac{k}{4h}$ a $k_1 = \dfrac{k}{2}$. Sestavíme soustavu diferenčních rovnic pro výpočet $(j+1)$ní časové vrstvy pomocí C–N schematu. Levou stranu rovnice (1) nahradíme zpětnou diferencí. Pravou stranu budeme aproximovat v $(j+1)$ní časové vrstvě tak, že zprůměrujeme aproximaci centrální diferencí v $(j+1)$ní časové vrstvě a aproximaci centrální diferencí v $j$té časové vrstvě, a dosadíme odpovídající hodnoty do funkce $f(x,t,u)$.
Funkci $f_i^{j+1}(u) = f(x_i, t_{j+1}, u)$ linearizujeme stejně jako u implicitního schema pomocí Taylorova polynomu 1. stupně

$$f_i^{j+1}(u_i^{j+1}) \cong f_i^{j+1}(u_i^j) + \frac{\partial f_i^{j+1}}{\partial u}(u_i^j)(u_i^{j+1} - u_i^j)\,.$$

Tedy diskretizační náhrada pro C–N metodu bude

$$u_i^{j+1} - u_i^j = \alpha g_i^{j+1}(u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}) + \alpha g_i^j(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j) + \beta e_i^{j+1}(u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}) + \beta e_i^j(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) + k_1(f_i^{j+1}(u_i^j) + f_i^j(u_i^j)) + k_1\frac{\partial f_i^{j+1}}{\partial u}(u_i^j)(u_i^{j+1} - u_i^j)\,,$$

tj.

$$(\beta e_i^{j+1} - \alpha g_i^{j+1})u_{i-1}^{j+1} + \left(1 + 2\alpha g_i^{j+1} - k_1\frac{\partial f_i^{j+1}}{\partial u}(u_i^j)\right)u_i^{j+1} + \left(-\alpha g_i^{j+1} - \beta e_i^{j+1}\right)u_{i+1}^{j+1} =$$

$$= (\alpha g_i^j - \beta e_i^j)u_{i-1}^j + \left(1 - 2\alpha g_i^j - k_1\frac{\partial f_i^{j+1}}{\partial u}(u_i^j)\right)u_i^j + \left(\alpha g_i^j + \beta e_i^j\right)u_{i+1}^j + k_1\left(f_i^{j+1}(u_i^j) + f_i^j(u_i^j)\right), \quad i = 1,\dots,n-1\,,\ j = 0,\dots,m-1. \tag{5}$$

Pro zjednodušení označíme

$$(d1)_i^{j+1} = (\beta e_i^{j+1} - \alpha g_i^{j+1}), \quad (d2)_i^{j+1} = 1 + 2\alpha g_i^{j+1} - k_1\frac{\partial f_i^{j+1}}{\partial u}(u_i^j), \quad (d3)_i^{j+1} = -\alpha g_i^{j+1} - \beta e_i^{j+1},$$

a pro pravou stranu

$$(d4)_i^j = (\alpha g_i^j - \beta e_i^j)\,, \quad (d5)_i^j = \left(1 - 2\alpha g_i^j - k_1 \frac{\partial f_i^{j+1}}{\partial u}(u_i^j)\right), \quad (d6)_i^j = \left(\alpha g_i^j + \beta e_i^j\right),$$

$$F^j(i) = k_1\left(f_i^{j+1}(u_i^j) + f_i^j(u_i^j)\right)$$

tedy

$$(d1)_i^{j+1} u_{i-1}^{j+1} + (d2)_i^{j+1} u_i^{j+1} + (d3)_i^{j+1} u_{i+1}^{j+1} = (d4)_i^j u_{i-1}^j + (d5)_i^j u_i^j + (d6)_i^j u_{i+1}^j + F^j(i)\,, \quad i = 1, \dots n-1,\ j = 0, \dots, m-1. \tag{6}$$

1. Okrajové podmínky (3) a (4) nahradíme stejně jako v prvním případě pro implicitní schema

$$(\alpha 1)\, u_0^{j+1} + \frac{(\beta 1)^{j+1}}{2h}\left(-3u_0^{j+1} + 4u_1^{j+1} - u_2^{j+1}\right) = (\gamma 1)^{j+1}$$

$$(\alpha 2)\, u_n^{j+1} + \frac{(\beta 2)^{j+1}}{2h}\left(u_{n-2}^{j+1} - 4u_{n-1}^{j+1} + 3u_n^{j+1}\right) = (\gamma 2)^{j+1}\,,$$

při označení $p^{j+1} = \dfrac{1}{2h(\alpha 1) - 3(\beta 1)^{j+1}}$, $q^{j+1} = \dfrac{1}{2h(\alpha 2) + 3(\beta 2)^{j+1}}$ vyjádříme u_0^{j+1}, u_n^{j+1}

$$u_0^{j+1} = p^{j+1}\left(-4(\beta 1)^{j+1} u_1^{j+1} + (\beta 1)^{j+1} u_2^{j+1} + 2h(\gamma 1)^{j+1}\right) \tag{7}$$

a

$$u_n^{j+1} = q^{j+1}\left(4(\beta 2)^{j+1} u_{n-1}^{j+1} - (\beta 2)^{j+1} u_{n-2}^{j+1} + 2h(\gamma 2)^{j+1}\right)\,, \tag{8}$$

které dosadíme do první a poslední rovnice (6):

$$(d1)_1^{j+1} u_0^{j+1} + (d2)_1^{j+1} u_1^{j+1} + (d3)_1^{j+1} u_2^{j+1} = (d4)_1^j u_0^j + (d5)_1^j u_1^j + (d6)_1^j u_2^j + F^j(1)\,, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

$$(d1)_{n-1}^{j+1}u_{n-2}^{j+1} + (d2)_{n-1}^{j+1}u_{n-1}^{j+1} + (d3)_{n-1}^{j+1}u_{n}^{j+1} = (d4)_{n-1}^{j}u_{n-2}^{j} + (d5)_{n-1}^{j}u_{n-1}^{j} + (d6)_{n-1}^{j}u_{n}^{j} + F^j(n-1)\,, \quad j = 0, 1, \ldots, m.$$

Dostáváme výslednou rovnici pro $i = 1$, $j = 0, \ldots, m$

$$\left(-4(d1)_1^{j+1}p^{j+1}(\beta 1)^{j+1} + (d2)_1^{j+1}\right)u_1^{j+1} + \left((d1)_1^{j+1}p^{j+1}(\beta 1)^{j+1} + (d3)_1^{j+1}\right)u_2^{j+1} = (d4)_1^{j}u_0^{j} + (d5)_1^{j}u_1^{j} + (d6)_1^{j}u_2^{j} + F^j(1) - (d1)_1^{j+1}p^{j+1}2h(\gamma 1)^{j+1}\,,$$

a výslednou rovnici pro $i = n-1$, $j = 0, \ldots, m$.

$$\left((d1)_{n-1}^{j+1} - (d3)_{n-1}^{j+1}q^{j+1}(\beta 2)^{j+1}\right)u_{n-2}^{j+1} + \left(4(d3)_{n-1}^{j+1}q^{j+1}(\beta 2)^{j+1} + (d2)_{n-1}^{j+1}\right)u_{n-1}^{j+1} =$$

$$= (d4)_{n-1}^{j}u_{n-2}^{j} + (d5)_{n-1}^{j}u_{n-1}^{j} + (d6)_{n-1}^{j}u_{n}^{j} + F^j(n-1) - (d3)_{n-1}^{j+1}q^{j+1}2h(\gamma 2)^{j+1},$$

Soustavu diferenčních rovnic pro výpočet $(j+1)$ní z $j$té časové vrstvy pomocí C–N schematu zapíšeme v maticovém tvaru pro neznámý vektor $\mathbf{U}^{j+1} = \left(u_1^{j+1}, \ldots, u_{n-1}^{j+1}\right)^\top$,

$$A\mathbf{U}^{j+1} = B\mathbf{u}^j + \mathbf{F}^j\,, \tag{9}$$

kde matice A, typu $(n-1)\times(n-1)$,

$$A=\begin{bmatrix} (d2)_1^{j+1}-4(d1)_1^{j+1}p^{j+1}(\beta 1)^{j+1} & (d3)_1^{j+1}+(d1)_1^{j+1}p^{j+1}(\beta 1)^{j+1} & 0 & 0 \\ (d1)_2^{j+1} & (d2)_2^{j+1} & (d3)_2^{j+1} & 0 \\ & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \\ 0 & (d1)_{n-2}^{j+1} & (d2)_{n-2}^{j+1} & (d3)_{n-2}^{j+1} \\ 0 & 0 & (d1)_{n-1}^{j+1}-(d3)_{n-1}^{j+1}q^{j+1}(\beta 2)^{j+1} & (d2)_{n-1}^{j+1}+4(d3)_{n-1}^{j+1}q^{j+1}(\beta 2)^{j+1} \end{bmatrix},$$

matice B, typu $(n-1)\times(n+1)$,

$$B=\begin{bmatrix} (d4)_1^j & (d5)_1^j & (d6)_1^j & 0 & 0 \\ & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \\ 0 & 0 & (d4)_{n-1}^j & (d5)_{n-1}^j & (d6)_{n-1}^j \end{bmatrix},$$

a $\mathbf{F}^j=\left(F^j(1)-(d1)_1^{j+1}p^{j+1}2h(\gamma 1)^{j+1},\ldots,F^j(i),\ldots,F^j(n-1)-(d3)_{n-1}^{j+1}q^{j+1}2h(\gamma 2)^{j+1}\right)^\top$ je vektor délky $(n-1)$.

Hodnoty u_0^{j+1} a u_n^{j+1} dopočítáme ze vztahů (7) a (8).

Potom $\mathbf{u}^{j+1}=\left(u_0^{j+1},u_1^{j+1},\cdots,u_{n-1}^{j+1},u_n^{j+1}\right)^\top$ je hledaný vektor v další časové vrstvě.

2. Okrajové podmínky lze diskretizovat centrálními diferencemi pomocí fiktivních uzlů tak, jako u jednoduché implicitní formule. Bude tedy platit

$$-(\beta 1)^{j+1} u_{-1}^{j+1} + 2h(\alpha 1) u_0^{j+1} + (\beta 1)^{j+1} u_1^{j+1} = 2h(\gamma 1)^{j+1} \tag{10}$$

a

$$-(\beta 2)^{j+1} u_{n-1}^{j+1} + 2h(\alpha 2) u_n^{j+1} + (\beta 2)^{j+1} u_{n+1}^{j+1} = 2h(\gamma 2)^{j+1} \tag{11}$$

Rovnici (6)

$$(d1)_i^{j+1} u_{i-1}^{j+1} + (d2)_i^{j+1} u_i^{j+1} + (d3)_i^{j+1} u_{i+1}^{j+1} = (d4)_i^j u_{i-1}^j + (d5)_i^j u_i^j + (d6)_i^j u_{i+1}^j + F^j(i)\,, \quad i = 1, \ldots n-1,\ j = 0, \ldots, m-1.$$

vyjádříve pro $i = 0$ a $i = n$,

$$(d1)_0^{j+1} u_{-1}^{j+1} + (d2)_0^{j+1} u_1^{j+1} + (d3)_0^{j+1} u_2^{j+1} = G^j(0)\,, \quad j = 0, 1, \ldots, m.$$

$$(d1)_n^{j+1} u_{n-1}^{j+1} + (d2)_n^{j+1} u_n^{j+1} + (d3)_n^{j+1} u_{n+1}^{j+1} = G^j(n)\,, \quad j = 0, 1, \ldots, m,$$

kde jsme položili $G^j(i) = (d4)_i^j u_{i-1}^j + (d5)_i^j u_i^j + (d6)_i^j u_{i+1}^j + F^j(i)$.

Pomocí (10) a (11) eliminujeme fiktivní neznáme $u_{-1}^{j+1}, u_{n+1}^{j+1}$. Dostáváme výslednou rovnici pro $i = 0$

$$\left(2h(d1)_0^{j+1}(\alpha 1) + (d2)_0^{j+1}(\beta 1)^{j+1}\right) u_0^{j+1} + (\beta 1)^{j+1} \left((d1)_0^{j+1} + (d3)_0^{j+1}\right) u_1^{j+1} = G^j(0)(\beta 1)^{j+1} + 2h(d1)_0^{j+1}(\gamma 1)^{j+1}\,, \quad j = 0, \ldots, m,$$

a výslednou rovnici pro $i = n$

$$(\beta 2)^{j+1} \left((d1)_n^{j+1} + (d3)_n^{j+1}\right) u_{n-1}^{j+1} + \left((\beta 2)^{j+1}(d2)_n^{j+1} - 2h(\alpha 2)(d3)_n^{j+1}\right) u_n^{j+1} = G^j(n)(\beta 2)^{j+1} - 2h(d3)_n^{j+1}(\gamma 2)^{j+1}\,, \quad j = 0, \ldots, m.$$

Soustavu diferenčních rovnic pro výpočet $(j+1)$ní z $j$té časové vrstvy pomocí C–N schematu zapíšeme v maticovém tvaru pro neznámý vektor $\mathbf{u}^{j+1} = \left(u_0^{j+1}, \dots, u_n^{j+1}\right)^\top$,

$$A\mathbf{u}^{j+1} = \mathbf{G}^j,$$

kde matice A je třídiagonální matice typu $(n+1) \times (n+1)$

$$A = \begin{bmatrix} 2h(d1)_0^{j+1}(\alpha 1) + (d2)_0^{j+1}(\beta 1)^{j+1} & (\beta 1)^{j+1}\left((d1)_0^{j+1} + (d3)_0^{j+1}\right) & 0 & 0 \\ (d1)_1^{j+1} & (d2)_1^{j+1} & (d3)_1^{j+1} & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & (d1)_{n-1}^{j+1} & (d2)_{n-1}^{j+1} & (d3)_{n-1}^{j+1} \\ 0 & 0 & (\beta 2)^{j+1}\left((d1)_n^{j+1} + (d3)_n^{j+1}\right) & (\beta 2)^{j+1}(d2)_n^{j+1} - 2h(\alpha 2)(d3)_n^{j+1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}^j = \left(G^j(0)(\beta 1)^{j+1} + 2h(d1)_0^{j+1}(\gamma 1)^{j+1}, \dots, G^j(i), \dots, G^j(n)(\beta 2)^{j+1} - 2h(d3)_n^{j+1}(\gamma 2)^{j+1}\right)^\top.$$