PDR parabolického typu– metoda sítí

Rovnice

Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle a; b\rangle,\ t \geq 0\}$ je dána PDR

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t,u) \tag{1}$$

s počáteční podmínkou

$$u(x,0) \quad = \quad \varphi(x) \tag{2}$$

a okrajovými podmínkami

$$\alpha 1\, u(a,t) + \beta 1(t)\frac{\partial u}{\partial x}(a,t) \quad = \quad \gamma 1(t) \tag{3}$$

$$\alpha 2\, u(b,t) + \beta 2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(b,t) \quad = \quad \gamma 2(t) \tag{4}$$

Explicitní metoda

Pro řešení metodou sítí nejdříve k daným krokům h ve směru osy x a k ve směru osy t vytvoříme síť $D^{h,k}$ s uzly $[x_i, t_j]$, kde

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_2 < \cdots < x_n = b\,, & x_{i+1} &= x_i + h\,,\ h = \tfrac{b-a}{n} \\ 0 &= t_0 < t_1 < \cdots < t_m\,, & t_{j+1} &= t_j + k\,. \end{aligned}$$

Přibližnou hodnotu řešení v uzlu $[x_i, t_j]$ budeme značit u_i^j, tedy

$$u_i^j \cong u(x_i, t_j)\,, \quad i = 0, \ldots, n\,,\ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dále označme

$$g_i^j = g(x_i, t_j)\,, \quad e_i^j = e(x_i, t_j)\,, \quad i = 0, \ldots, n\,,\ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Přibližné diferenční rovnice pro explicitní metodu:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = g_i^j \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} + e_i^j \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} + f(x_i, t_j, u_i^j)\,.$$

upravíme na schema pro výpočet přibližných hodnot řešení v dalších časových vrstvách

$$u_i^{j+1} = g_i^j \frac{k}{h^2}(u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) + e_i^j\, k \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} + \left(1 - g_i^j \frac{2k}{h^2}\right) u_i^j + k\, f(x_i, t_j, u_i^j)\,, \quad i = 1, \ldots, n-1\,,\ j = 0, 1, \ldots.$$

$$u_i^{j+1} = \left(g_i^j \frac{k}{h^2} - e_i^j \frac{k}{2h}\right) u_{i-1}^j + \left(1 - g_i^j \frac{2k}{h^2}\right) u_i^j + \left(g_i^j \frac{k}{h^2} + e_i^j \frac{k}{2h}\right) u_{i+1}^j + k\, f(x_i, t_j, u_i^j)\,, \quad i = 1, \ldots, n-1\,,\ j = 0, 1, \ldots.$$

Tedy, označíme $\alpha = \dfrac{k}{h^2}$, $\beta = \dfrac{k}{2h}$. Krok h a krok k volíme tak, aby metoda byla stabilní. Kdy je metoda stabilní určujeme pro každou úlohu zvlášť, v závislosti na funkcích g, e, f a počátečních podmínkách.
Označíme-li dále $f(x_i, t_j, u_i^j) = f_i^j$, je

$$\boxed{u_i^{j+1} = \left(g_i^j \alpha - e_i^j\, \beta\right) u_{i-1}^j + \left(1 - 2\alpha g_i^j\right) u_i^j + \left(g_i^j \alpha + e_i^j\, \beta\right) u_{i+1}^j + k\, f_i^j, \quad i = 1, \ldots, n-1,\; j = 0, 1, \ldots.} \tag{5}$$

Využijeme znalosti přesných hodnot řešení v uzlových bodech, které již známe z počáteční podmínky (2)

$$u_i^0 = u(x_i, 0) = \varphi(x_i)\,,\; i = 0, \ldots, n\,.$$

Označíme $(\beta 1)^j = \beta 1(t_j)\,, (\beta 2)^j = \beta 2(t_j)$, $(\gamma 1)^j = \gamma 1(t_j), (\gamma 2)^j = \gamma 2(t_j)$.

Okrajové podmínky (3) a (4) nahradíme s přesností $O(h^2)$ takto:

$$(\alpha 1)\, u_0^j + \frac{(\beta 1)^j}{2h}\,(-3u_0^j + 4u_1^j - u_2^j) = (\gamma 1)^j$$

$$(\alpha 2)\, u_n^j + \frac{(\beta 2)^j}{2h}\,(u_{n-2}^j - 4u_{n-1}^j + 3u_n^j) = (\gamma 2)^j$$

a po úpravě dostáváme

$$\boxed{u_0^j = \frac{(\beta 1)^j\,(-4u_1^j + u_2^j) + 2h(\gamma 1)^j}{2h(\alpha 1) - 3(\beta 1)^j}} \tag{6}$$

$$\boxed{u_n^j = \frac{(\beta 2)^j\,(4u_{n-1}^j - u_{n-2}^j) + 2h(\gamma 2)^j}{2h(\alpha 2) + 3(\beta 2)^j}} \tag{7}$$

Explicitní lineární algebraické vztahy (5) lze vyjádřit maticově

$$\mathbf{U}^{j+1} = A^j \mathbf{u}^j + k\,\mathbf{F}^j\,, \tag{8}$$

kde pomocný vektor $\mathbf{U}^{j+1} = \left(u_1^{j+1}, \ldots, u_{n-1}^{j+1}\right)^\top$, $\mathbf{F}^j = (f_1^j, \ldots, f_{n-1}^j)$ jsou vektory délky $(n-1)$ a matice A^j, typu $(n-1) \times (n+1)$,

$$A^j = \begin{bmatrix} (g_1^j\alpha - e_1^j\beta) & (1 - 2\alpha g_1^j) & (g_1^j\alpha + e_1^j\beta) & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & (g_{n-1}^j\alpha - e_{n-1}^j\beta) & (1 - 2\alpha g_{n-1}^j) & (g_{n-1}^j\alpha + e_{n-1}^j\beta) \end{bmatrix}.$$

Zbylé krajní souřadnice hodnoty u_0^{j+1} a u_n^{j+1} hledaného vektoru v $(j+1)$ní časové vrstvě $\mathbf{u}^{j+1} = \left(u_0^{j+1}, u_1^{j+1}, \cdots, u_n^{j+1}\right)^\top$ se dopočítají z okrajových podmínek ze vztahů (6) a (7) pro j:=j+1.