PDR parabolického typu– implicitní metoda sítí

Rovnice

Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle a;b\rangle,\ t \geq 0\}$ je dána PDR

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t,u) \tag{1}$$

s počáteční podmínkou

$$u(x,0) \;=\; \varphi(x) \tag{2}$$

a okrajovými podmínkami

$$\alpha 1\, u(a,t) + \beta 1(t)\frac{\partial u}{\partial x}(a,t) \;=\; \gamma 1(t) \tag{3}$$

$$\alpha 2\, u(b,t) + \beta 2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(b,t) \;=\; \gamma 2(t) \tag{4}$$

Jednoduchá implicitní formule

Nejdříve k daným krokům h ve směru osy x a k ve směru osy t vytvoříme síť $D_{h,k}$ s uzly $[x_i, t_j]$, kde

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,, \qquad && x_{i+1} = x_i + h\,, \quad h = \tfrac{1}{n} \\ 0 &= t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\,, \qquad && t_{j+1} = t_j + k\,, \quad k = \tfrac{T}{m}\,. \end{aligned}$$

Označíme $\alpha = \dfrac{k}{h^2}$, $\beta = \dfrac{k}{2h}$. Sestavíme soustavu diferenčních rovnic pro výpočet $(j+1)$ní časové vrstvy pomocí jednoduchého implicitní schématu. Levou stranu rovnice (1) nahradíme zpětnou diferencí. Pravou stranu budeme aproximovat v $(j+1)$ní časové vrstvě, přičemž druhou prostorovou derivaci i první prostorovou derivaci nahradíme centrálními diferencemi.

Funkci $f_i^{j+1}(u) = f(x_i, t_{j+1}, u)$ linearizujeme pomocí Taylorova polynomu 1. stupně

$$f_i^{j+1}(u_i^{j+1}) \cong f_i^{j+1}(u_i^j) + \frac{\partial f_i^{j+1}}{\partial u}(u_i^j)(u_i^{j+1} - u_i^j)$$

Tedy diskretizační náhrada pro implicitní metodu bude

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = g_i^{j+1}\frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2} + e_i^{j+1}\,\frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{2h} + f_i^{j+1}(u_i^j) + \frac{\partial f_i^{j+1}}{\partial u}(u_i^j)(u_i^{j+1} - u_i^j)\,,$$

$$i = 1, \ldots, n-1\,,\; j = 0, \ldots, m-1.$$

Po úpravě dostáváme

$$u_i^{j+1} - u_i^j = \alpha g_i^{j+1}(u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}) + \beta e_i^{j+1}\,(u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}) + k\, f_i^{j+1}(u_i^j) + k\frac{\partial f_i^{j+1}}{\partial u}(u_i^j)(u_i^{j+1} - u_i^j)\,,$$

tj.

$$(\beta e_i^{j+1} - \alpha g_i^{j+1}) u_{i-1}^{j+1} + \left(1 + 2\alpha g_i^{j+1} - k \frac{\partial f_i^{j+1}}{\partial u}(u_i^j)\right) u_i^{j+1} + \left(-\alpha g_i^{j+1} - \beta e_i^{j+1}\right) u_{i+1}^{j+1} = \left(1 - k\, \frac{\partial f_i^{j+1}}{\partial u}(u_i^j)\right) u_i^j + k\, f_i^{j+1}(u_i^j), \tag{5}$$

$$i = 1, \ldots, n-1\,,\ j = 0, \ldots, m-1.$$

Pro zjednodušení označíme

$(d1)_i^{j+1} = (\beta e_i^{j+1} - \alpha g_i^{j+1}), \quad (d2)_i^{j+1} = 1 + 2\alpha g_i^{j+1} - k \dfrac{\partial f_i^{j+1}}{\partial u}(u_i^j), \quad (d3)_i^{j+1} = -\alpha g_i^{j+1} - \beta e_i^{j+1},$

$F^j(i) = \left(1 - k\, \dfrac{\partial f_i^{j+1}}{\partial u}(u_i^j)\right) u_i^j + k\, f_i^{j+1}(u_i^j)$

tedy

$$(d1)_i^{j+1} u_{i-1}^{j+1} + (d2)_i^{j+1} u_i^{j+1} + (d3)_i^{j+1} u_{i+1}^{j+1} = F^j(i)\,, \quad i = 1, \ldots n-1,\ j = 0, \ldots, m-1. \tag{6}$$

1. Jedna z možností je nahradit okrajové podmínky (3) a (4) (s přesností $O(h^2)$) takto

$$(\alpha 1)\, u_0^{j+1} + \frac{(\beta 1)^{j+1}}{2h} \left(-3u_0^{j+1} + 4u_1^{j+1} - u_2^{j+1}\right) = (\gamma 1)^{j+1}$$

$$(\alpha 2)\, u_n^{j+1} + \frac{(\beta 2)^{j+1}}{2h} \left(u_{n-2}^{j+1} - 4u_{n-1}^{j+1} + 3u_n^{j+1}\right) = (\gamma 2)^{j+1}\,,$$

po úpravě dostáváme

$$\left(2h(\alpha 1) - 3(\beta 1)^{j+1}\right) u_0^{j+1} + 4(\beta 1)^{j+1} u_1^{j+1} - (\beta 1)^{j+1} u_2^{j+1} = 2h(\gamma 1)^{j+1} \tag{7}$$

a

$$\left(2h(\alpha 2)+3(\beta 2)^{j+1}\right)u_n^{j+1}-4(\beta 2)^{j+1}u_{n-1}^{j+1}+(\beta 2)^{j+1}u_{n-2}^{j+1}=2h(\gamma 2)^{j+1} \tag{8}$$

Dále označíme $p^{j+1}=\dfrac{1}{2h(\alpha 1)-3(\beta 1)^{j+1}}$, $\quad q^{j+1}=\dfrac{1}{2h(\alpha 2)+3(\beta 2)^{j+1}}$ a vyjádříme u_0^{j+1}, u_n^{j+1}

$$u_0^{j+1}=p^{j+1}\left(-4(\beta 1)^{j+1}u_1^{j+1}+(\beta 1)^{j+1}u_2^{j+1}+2h(\gamma 1)^{j+1}\right) \tag{9}$$

a

$$u_n^{j+1}=q^{j+1}\left(4(\beta 2)^{j+1}u_{n-1}^{j+1}-(\beta 2)^{j+1}u_{n-2}^{j+1}+2h(\gamma 2)^{j+1}\right)\ , \tag{10}$$

které dosadíme do první a poslední rovnice (6):

$$(d1)_1^{j+1}u_0^{j+1}+(d2)_1^{j+1}u_1^{j+1}+(d3)_1^{j+1}u_2^{j+1}=F^j(1)\,,\quad j=0,1,\ldots,m.$$

$$(d1)_{n-1}^{j+1}u_{n-2}^{j+1}+(d2)_{n-1}^{j+1}u_{n-1}^{j+1}+(d3)_{n-1}^{j+1}u_n^{j+1}=F^j(n-1)\,,\quad j=0,1,\ldots,m.$$

Dostáváme výslednou rovnici pro $i=1$

$$\left(-4(d1)_1^{j+1}p^{j+1}(\beta 1)^{j+1}+(d2)_1^{j+1}\right)u_1^{j+1}+\left((d1)_1^{j+1}p^{j+1}(\beta 1)^{j+1}+(d3)_1^{j+1}\right)u_2^{j+1}=F^j(1)-(d1)_1^{j+1}p^{j+1}2h(\gamma 1)^{j+1}\,,\quad j=0,\ldots,m.$$

a výslednou rovnici pro $i=n-1$

$$\left(-(d3)_{n-1}^{j+1}q^{j+1}(\beta 2)^{j+1}+(d1)_{n-1}^{j+1}\right)u_{n-2}^{j+1}+\left(4(d3)_{n-1}^{j+1}q^{j+1}(\beta 2)^{j+1}+(d2)_{n-1}^{j+1}\right)u_{n-1}^{j+1}=F^j(n-1)-(d3)_{n-1}^{j+1}q^{j+1}2h(\gamma 2)^{j+1}\,,\quad j=0,\ldots,m.$$

Soustavu diferenčních rovnic pro výpočet $(j+1)$ní z $j$té časové vrstvy pomocí jednoduchého implicitního schématu zapíšeme v maticovém tvaru pro neznámý vektor $\mathbf{U}^{j+1}=\left(u_1^{j+1},\ldots,u_{n-1}^{j+1}\right)^\top$,

$$A\mathbf{U}^{j+1} = \mathbf{F}^j \tag{11}$$

kde matice A je třídiagonální typu $(n-1)\times(n-1)$

$$A = \begin{bmatrix} (d2)_1^{j+1} - 4(d1)_1^{j+1}p^{j+1}(\beta 1)^{j+1} & (d3)_1^{j+1} + (d1)_1^{j+1}p^{j+1}(\beta 1)^{j+1} & 0 & 0 \\ (d1)_2^{j+1} & (d2)_2^{j+1} & (d3)_2^{j+1} & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & (d1)_{n-2}^{j+1} & (d2)_{n-2}^{j+1} & (d3)_{n-2}^{j+1} \\ 0 & 0 & (d1)_{n-1}^{j+1} - (d3)_{n-1}^{j+1}q^{j+1}(\beta 2)^{j+1} & (d2)_{n-1}^{j+1} + 4(d3)_{n-1}^{j+1}q^{j+1}(\beta 2)^{j+1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}^j = \left(F^j(1) - (d1)_1^{j+1}p^{j+1}2h(\gamma 1)^{j+1}, \dots, F^j(i), \dots, F^j(n-1) - (d3)_{n-1}^{j+1}q^{j+1}2h(\gamma 2)^{j+1} \right)^\top .$$

Hodnoty u_0^{j+1} a u_n^{j+1} dopočítáme ze vztahů (9) a (10).
Potom $\mathbf{u}^{j+1} = \left(u_0^{j+1}, u_1^{j+1}, \cdots, u_{n-1}^{j+1}, u_n^{j+1}\right)^\top$ je hledaný vektor v další časové vrstvě.

2. Okrajové podmínky lze také diskretizovat centrálními diferencemi pomocí fiktivních bodů x_{-1}, x_{n+1} (rovněž s přesností $O(h^2)$)

$$(\alpha 1)\, u_0^{j+1} + \frac{(\beta 1)^{j+1}}{2h}\,(u_1^{j+1} - u_{-1}^{j+1}) = (\gamma 1)^{j+1}$$

$$(\alpha 2)\, u_n^{j+1} + \frac{(\beta 2)^{j+1}}{2h}\,(u_{n+1}^{j+1} - u_{n-1}^{j+1}) = (\gamma 2)^{j+1}\,,$$

po úpravě dostáváme

$$-(\beta 1)^{j+1} u_{-1}^{j+1} + 2h(\alpha 1) u_0^{j+1} + (\beta 1)^{j+1} u_1^{j+1} = 2h(\gamma 1)^{j+1} \tag{12}$$

a

$$-(\beta 2)^{j+1} u_{n-1}^{j+1} + 2h(\alpha 2) u_n^{j+1} + (\beta 2)^{j+1} u_{n+1}^{j+1} = 2h(\gamma 2)^{j+1} \tag{13}$$

Rovnici (6) vyjádříve pro $i = 0$ a $i = n$:

$$(d1)_0^{j+1} u_{-1}^{j+1} + (d2)_0^{j+1} u_0^{j+1} + (d3)_0^{j+1} u_1^{j+1} = F^j(0)\,, \quad j = 0, 1, \ldots, m.$$

$$(d1)_n^{j+1} u_{n-1}^{j+1} + (d2)_n^{j+1} u_n^{j+1} + (d3)_n^{j+1} u_{n+1}^{j+1} = F^j(n)\,, \quad j = 0, 1, \ldots, m.$$

a pomocí (12) a (13) eliminujeme fiktivní neznáme $u_{-1}^{j+1}, u_{n+1}^{j+1}$.
Dostáváme výslednou rovnici pro $i = 0$

$$\left(2h(d1)_0^{j+1}(\alpha 1) + (d2)_0^{j+1}(\beta 1)^{j+1}\right) u_0^{j+1} + (\beta 1)^{j+1}\left((d1)_0^{j+1} + (d3)_0^{j+1}\right) u_1^{j+1} = F^j(0)(\beta 1)^{j+1} + 2h(d1)_0^{j+1}(\gamma 1)^{j+1}\,, \quad j = 0, \ldots, m.$$

a výslednou rovnici pro $i = n$

$$(\beta 2)^{j+1}\left((d1)_n^{j+1} + (d3)_n^{j+1}\right) u_{n-1}^{j+1} + \left((\beta 2)^{j+1}(d2)_n^{j+1} - 2h(\alpha 2)(d3)_n^{j+1}\right) u_n^{j+1} = F^j(n)(\beta 2)^{j+1} - 2h(d3)_n^{j+1}(\gamma 2)^{j+1}\,, \quad j = 0, \ldots, m.$$

Soustavu diferenčních rovnic pro výpočet $(j+1)$ní z $j$té časové vrstvy pomocí jednoduchého implicitního schématu zapíšeme v maticovém tvaru pro neznámý vektor $\mathbf{u}^{j+1} = \left(u_0^{j+1}, \ldots, u_n^{j+1}\right)^\top$,

$$A\mathbf{u}^{j+1} = \mathbf{F}^j\,, \tag{14}$$

kde matice A je třídiagonální matici typu $(n+1)\times(n+1)$

$$A = \begin{bmatrix} 2h(d1)_0^{j+1}(\alpha 1) + (d2)_0^{j+1}(\beta 1)^{j+1} & (\beta 1)^{j+1}\left((d1)_0^{j+1} + (d3)_0^{j+1}\right) & 0 & 0 \\ (d1)_1^{j+1} & (d2)_1^{j+1} & (d3)_1^{j+1} & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & (d1)_{n-1}^{j+1} & (d2)_{n-1}^{j+1} & (d3)_{n-1}^{j+1} \\ 0 & 0 & (\beta 2)^{j+1}\left((d1)_n^{j+1} + (d3)_n^{j+1}\right) & (\beta 2)^{j+1}(d2)_n^{j+1} - 2h(\alpha 2)(d3)_n^{j+1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}^j = \left(F^j(0)(\beta 1)^{j+1} + 2h(d1)_0^{j+1}(\gamma 1)^{j+1}, \ldots, F^j(i), \ldots, F^j(n)(\beta 2)^{j+1} - 2h(d3)_n^{j+1}(\gamma 2)^{j+1}\right)^\top\,.$$