PDR parabolického typu, metoda predictor – corrector

Rovnice

Na množině $D = \{[x,t] : x \in \langle a; b \rangle,\ t \geq 0\}$ je dána PDR

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t,u) \tag{1}$$

s počáteční podmínkou

$$u(x,0) \quad = \quad \varphi(x) \tag{2}$$

a okrajovými podmínkami

$$\alpha 1\, u(a,t) + \beta 1(t)\frac{\partial u}{\partial x}(a,t) \quad = \quad \gamma 1(t) \tag{3}$$

$$\alpha 2\, u(b,t) + \beta 2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(b,t) \quad = \quad \gamma 2(t) \tag{4}$$

Formule predictor – corrector

Nejdříve k daným krokům h ve směru osy x a k ve směru osy t vytvoříme síť $D_{h,k}$ s uzly $[x_i, t_j]$, kde

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,, \qquad && x_{i+1} = x_i + h\,, \quad h = \tfrac{b-a}{n} \\ 0 &= t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\,, \qquad && t_{j+1} = t_j + k\,, \quad k = \tfrac{T}{m}\,. \end{aligned}$$

Přibližnou hodnotu řešení v uzlu $[x_i, t_j]$ budeme značit u_i^j, tedy

$$u_i^j \cong u(x_i, t_j)\,, \quad i = 0, \dots, n\,.$$

Označíme $\alpha = \dfrac{k}{h^2}$, $\beta = \dfrac{k}{2h}$, $g_i^j = g(x_i, t_j)\,,\quad e_i^j = e(x_i, t_j)$ a $f(x_i, t_j, u_i^j) = f_i^j\,,\quad i = 0, \dots, n\,.$

V metodě predictor–corrector pro výpočet $j+1$ časové vrstvy, tj. hodnot $u_i^{j+1}\,, i = 0, \dots, n$, využijeme nejdříve explicitní formuli. Vypočtené hodnoty explicitní metodou označíme $\bar{u}_i^{j+1}$. Tuto první část nazýváme "predictorem".
Tedy

$$\bar{u}_i^{j+1} = \left(g_i^j \alpha - e_i^j \beta\right) u_{i-1}^j + \left(1 - 2\alpha g_i^j\right) u_i^j + \left(g_i^j \alpha + e_i^j \beta\right) u_{i+1}^j + k\, f_i^j, \quad i = 1, \dots, n-1, \tag{5}$$

kde $u_i^0 = u(x_i, 0) = \varphi(x_i)\,,\ i = 0, \dots, n\,.$
Zbylé krajní souřadnice hodnoty $\bar{u}_0^{j+1}$ a $\bar{u}_n^{j+1}$ není třeba dopočítávat.

Druhou část výpočtu přibližných hodnot u_i^{j+1} nazýváme "correctorem". Zde již vypočtené hodnoty $\bar{u}_i^{j+1}\,, i = 1, \dots, n-1,$ opravíme jednoduchou implicitní formulí. Dosazením hodnot $\bar{u}_i^{j+1}$ do funkce f dostaneme aproximaci hodnoty $f(x_i, t_{j+1}, u_i^{j+1})$ v implicitní metodě a není třeba provádět linearizaci funkce f.
Označme $f_i^{j+1}(\bar{u}_i^{j+1}) = f(x_i, t_{j+1}, \bar{u}_i^{j+1})$, dostáváme diskretizační náhradu

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = g_i^{j+1} \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2} + e_i^{j+1} \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{2h} + f_i^{j+1}(\bar{u}_i^{j+1})\,, \quad i = 1, \dots, n-1\,.$$

Tedy

$$(\beta e_i^{j+1} - \alpha g_i^{j+1}) u_{i-1}^{j+1} + \left(1 + 2\alpha g_i^{j+1}\right) u_i^{j+1} + \left(-\alpha g_i^{j+1} - \beta e_i^{j+1}\right) u_{i+1}^{j+1} = u_i^j + k\, f_i^{j+1}(\bar{u}_i^{j+1}), \quad i = 1, \dots, n-1\ . \tag{6}$$

Pro zjednodušení označíme: $(d1)_i^{j+1} = (\beta e_i^{j+1} - \alpha g_i^{j+1})$, $(d2)_i^{j+1} = 1 + 2\alpha g_i^{j+1}$, $(d3)_i^{j+1} = -\alpha g_i^{j+1} - \beta e_i^{j+1}$, $\bar{F}^j(i) = u_i^j + k\, f_i^{j+1}(\bar{u}_i^{j+1})$, tedy

$$(d1)_i^{j+1} u_{i-1}^{j+1} + (d2)_i^{j+1} u_i^{j+1} + (d3)_i^{j+1} u_{i+1}^{j+1} = \bar{F}^j(i)\,, \quad i = 1, \dots n-1\,. \tag{7}$$

Okrajové podmínky (3) a (4) diskretizujeme takto

$$(\alpha 1)\, u_0^{j+1} + \frac{(\beta 1)^{j+1}}{2h} \left(-3u_0^{j+1} + 4u_1^{j+1} - u_2^{j+1}\right) = (\gamma 1)^{j+1}$$

$$(\alpha 2)\, u_n^{j+1} + \frac{(\beta 2)^{j+1}}{2h} \left(u_{n-2}^{j+1} - 4u_{n-1}^{j+1} + 3u_n^{j+1}\right) = (\gamma 2)^{j+1}\,,$$

Stejně jako u implicitní metody označíme $p^{j+1} = \dfrac{1}{2h(\alpha 1) - 3(\beta 1)^{j+1}}\,, \quad q^{j+1} = \dfrac{1}{2h(\alpha 2) + 3(\beta 2)^{j+1}}$ a vyjádříme u_0^{j+1}, u_n^{j+1}

$$u_0^{j+1} = p^{j+1} \left(-4(\beta 1)^{j+1} u_1^{j+1} + (\beta 1)^{j+1} u_2^{j+1} + 2h(\gamma 1)^{j+1}\right) \tag{8}$$

a

$$u_n^{j+1} = q^{j+1} \left(4(\beta 2)^{j+1} u_{n-1}^{j+1} - (\beta 2)^{j+1} u_{n-2}^{j+1} + 2h(\gamma 2)^{j+1}\right)\,, \tag{9}$$

které dosadíme do první a poslední rovnice (7):

$$(d1)_1^{j+1} u_0^{j+1} + (d2)_1^{j+1} u_1^{j+1} + (d3)_1^{j+1} u_2^{j+1} = \bar{F}^j(1)\,,$$

$$(d1)_{n-1}^{j+1} u_{n-2}^{j+1} + (d2)_{n-1}^{j+1} u_{n-1}^{j+1} + (d3)_{n-1}^{j+1} u_n^{j+1} = \bar{F}^j(n-1)$$

Dostáváme výslednou rovnici pro $i = 1$

$$\left(-4(d1)_1^{j+1} p^{j+1} (\beta 1)^{j+1} + (d2)_1^{j+1}\right) u_1^{j+1} + \left((d1)_1^{j+1} p^{j+1} (\beta 1)^{j+1} + (d3)_1^{j+1}\right) u_2^{j+1} = \bar{F}^j(1) - (d1)_1^{j+1} p^{j+1} 2h(\gamma 1)^{j+1}\,.$$

a výslednou rovnici pro $i = n-1$

$$\left(-(d3)_{n-1}^{j+1} q^{j+1} (\beta 2)^{j+1} + (d1)_{n-1}^{j+1}\right) u_{n-2}^{j+1} + \left(4(d3)_{n-1}^{j+1} q^{j+1} (\beta 2)^{j+1} + (d2)_{n-1}^{j+1}\right) u_{n-1}^{j+1} = \bar{F}^j(n-1) - (d3)_{n-1}^{j+1} q^{j+1} 2h (\gamma 2)^{j+1} .$$

Soustavu diferenčních rovnic pro výpočet $(j+1)$ní z $j$té časové vrstvy pomocí jednoduchého implicitního schématu zapíšeme v maticovém tvaru pro neznámý vektor $\mathbf{U}^{j+1} = \left(u_1^{j+1}, \ldots, u_{n-1}^{j+1}\right)^\top$,

$$A^j \mathbf{U}^{j+1} = \bar{\mathbf{F}}^j \tag{10}$$

kde třídiagonální matice A^j je typu $(n-1) \times (n-1)$

$$A^j = \begin{bmatrix} (d2)_1^{j+1} - 4(d1)_1^{j+1} p^{j+1} (\beta 1)^{j+1} & (d3)_1^{j+1} + (d1)_1^{j+1} p^{j+1} (\beta 1)^{j+1} & 0 & 0 \\ (d1)_2^{j+1} & (d2)_2^{j+1} & (d3)_2^{j+1} & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & (d1)_{n-2}^{j+1} & (d2)_{n-2}^{j+1} & (d3)_{n-2}^{j+1} \\ 0 & 0 & (d1)_{n-1}^{j+1} - (d3)_{n-1}^{j+1} q^{j+1} (\beta 2)^{j+1} & (d2)_{n-1}^{j+1} + 4(d3)_{n-1}^{j+1} q^{j+1} (\beta 2)^{j+1} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{F}}^j = \left(\bar{F}^j(1) - (d1)_1^{j+1} p^{j+1} 2h (\gamma 1)^{j+1}, \ldots, \bar{F}^j(i), \ldots, \bar{F}^j(n-1) - (d3)_{n-1}^{j+1} q^{j+1} 2h (\gamma 2)^{j+1}\right)^\top .$$

Hodnoty u_0^{j+1} a u_n^{j+1} dopočítáme ze vztahů (8) a (9).
Potom $\mathbf{u}^{j+1} = \left(u_0^{j+1}, u_1^{j+1}, \cdots, u_{n-1}^{j+1}, u_n^{j+1}\right)^\top$ je hledaný vektor v další časové vrstvě.