

# PDR parabolického typu – metoda přímek

## Rovnice

Na množině  $D = \{[x, t] : x \in \langle a; b \rangle, t \geq 0\}$  je dána PDR

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t, u) \quad (1)$$

s počáteční podmínkou

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (2)$$

a okrajovými podmínkami

$$\alpha_1 u(a, t) + \beta_1(t) \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = \gamma_1(t) \quad (3)$$

$$\alpha_2 u(b, t) + \beta_2(t) \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = \gamma_2(t) \quad (4)$$

## Metoda přímek

Na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  vytvoříme síť

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1, \quad x_{i+1} = x_i + h, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad h = \frac{1}{n}.$$

Označme v každém bodě  $x_i$  přibližnou funkci  $u_i(t) \cong u(x_i, t)$  pro  $t \in \langle 0, T \rangle$ . Provedeme-li diskrétní náhradu PDR (1) v bodě  $x_i$  a pro  $t \in \langle 0, T \rangle$ , dostaneme soustavu  $n - 1$  obyčejných diferenciálních rovnic (ODR):

$$u'_i(t) = g_i(t) \frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{h^2} + e_i(t) \frac{u_{i+1}(t) - u_{i-1}(t)}{2h} + f(x_i, t, u_i(t)), \quad t \in \langle 0, T \rangle, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (5)$$

kde po úpravě bude

$$u'_i(t) = \frac{2g_i(t) - he_i(t)}{2h^2} u_{i-1}(t) - \frac{2g_i(t)}{h^2} u_i(t) + \frac{2g_i(t) + he_i(t)}{2h^2} u_{i+1}(t) + f(x_i, t, u_i(t)), \quad t \in \langle 0, T \rangle, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (6)$$

Pro zjednodušení označíme

$$(d1)_i(t) = \frac{2g_i(t) - he_i(t)}{2h^2}, \quad (d2)_i(t) = -\frac{2g_i(t)}{h^2}, \quad (d3)_i(t) = \frac{2g_i(t) + he_i(t)}{2h^2},$$

tedy

$$u'_i(t) = (d1)_i(t)u_{i-1}(t) + (d2)_i(t)u_i(t) + (d3)_i(t)u_{i+1}(t) + f(x_i, t, u_i(t)), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (7)$$

Z okrajových podmínek dostaneme další dvě rovnice

$$\alpha 1 u_0(t) + \beta 1(t) \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) = \gamma 1(t) \quad (8)$$

$$\alpha 2 u_n(t) + \beta 2(t) \frac{\partial u}{\partial x}(x_n, t) = \gamma 2(t) \quad (9)$$

Diskretizovat podmínky (8) a (9) je možno dvěma dalšími algebraickým rovnicemi, které svazují neznámé funkce  $u_i(t) \cong u(x_i, t)$ .

$$\alpha 1 u_0(t) + \frac{\beta 1(t)}{2h} (-3u_0(t) + 4u_1(t) - u_2(t)) = \gamma 1(t) \Rightarrow u_0(t) = \frac{\beta 1(t)(u_2(t) - 4u_1(t)) + 2h\gamma 1(t)}{2h(\alpha 1) - 3\beta 1(t)} \quad (10)$$

$$\alpha 2 u_n(t) + \frac{\beta 2(t)}{2h} (u_{n-2}(t) - 4u_{n-1}(t) + 3u_n(t)) = \gamma 2(t) \Rightarrow u_n(t) = \frac{\beta 2(t)(4u_{n-1}(t) - u_{n-2}(t)) + 2h\gamma 2(t)}{2h(\alpha 2) + 3\beta 2(t)} \quad (11)$$

Dále je vhodné označení:  $p1(t) = \frac{1}{2h(\alpha 1) - 3\beta 1(t)}$ ,  $p2(t) = \frac{1}{2h(\alpha 2) + 3\beta 2(t)}$  a  $r1(t) = \beta 1(t)(p1)(t)$ ,  $r2(t) = \beta 2(t)(p2)(t)$ .

Vyloučíme-li neznámé funkce  $u_0(t)$  a  $u_n(t)$  jejich dosazením do první a poslední rovnice (7), tj. do rovnic

$$u'_1(t) = (d1)_1(t) u_0(t) + (d2)_1(t) u_1(t) + (d3)_1(t) u_2(t) + f(x_1, t, u_1(t)), \quad (12)$$

$$u'_{n-1}(t) = (d1)_{n-1}(t) u_{n-2}(t) + (d2)_{n-1}(t) u_{n-1}(t) + (d3)_{n-1}(t) u_n(t) + f(x_{n-1}, t, u_{n-1}(t)), \quad (13)$$

dostaneme výslednou první a  $(n-1)$ ní rovnici:

$$u'_1(t) = ((d2)_1(t) - 4(d1)_1(t)(r1)(t)) u_1(t) + ((d1)_1(t)(r1)(t) + (d3)_1(t)) u_2(t) + F(1)(t), \quad (14)$$

$$u'_{n-1}(t) = ((d1)_{n-1}(t) - (d3)_{n-1}(t)(r2)(t)) u_{n-2}(t) + ((d2)_{n-1}(t) + 4(d3)_{n-1}(t)(r2)(t)) u_{n-1}(t) + F(n-1)(t), \quad (15)$$

kde  $F(1)(t) = f(x_1, t, u_1(t)) + (d1)_1(t)(p1)(t)2h\gamma1(t)$  a  $F(n-1)(t) = f(x_{n-1}, t, u_{n-1}(t)) + (d3)_{n-1}(t)(p2)(t)2h\gamma2(t)$ .

Rovnice (14), (15) spolu s (7) pro  $i = 2, \dots, n-2$  tvoří soustavu  $n-1$  obyčejných diferenciálních rovnic. Z počátečních podmínek dostaneme počáteční podmínky pro výše zapsanou soustavu  $n-1$  rovnic:

$$u_i(0) = \varphi(x_i) \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Soustavu spolu s těmito počátečními podmínkami můžeme řešit např. některou z Rungových-Kuttových metod.

Přibližné hodnoty funkce  $u_0(t)$ , a  $u_n(t)$ , v diskrétních bodech  $t_j$  lze dopočítat z okrajových podmínek (10) a (11). (Poznámka. Soustavu (7) a (10), (11), tj.  $n+1$  algebro-diferenciálních rovnic (DAE).

spolu s počátečními podmínkami můžeme také řešit přímo některou z implicitních metod pro přibližné řešení DAE.)

Přibližné hodnoty funkce  $u_0(t)$ , a  $u_n(t)$ , v diskrétních bodech  $t_j$  lze dopočítat z okrajových podmínek (10) a (11).