Diskrétní dynamické systémy

1. Úvod

V následujícím textu budeme studovat chování systému diferenčních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n), \end{aligned} \tag{1}$$

kde f a g jsou dané funkce. Tyto rovnice popisují diskrétní dynamický systém zadaný vektorovým zobrazením $\boldsymbol{F} = (f, g)$ (budeme značit DDS($\boldsymbol{F}$)). Známe-li 0-tý stav systému, potom n-tý stav systému je (x_n, y_n) a je popsán vztahem

$$(x_n, y_n) = \boldsymbol{F}(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_n &= f(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ y_n &= g(x_{n-1}, y_{n-1}). \end{aligned}$$

Obdržíme posloupnost stavů systému $\boldsymbol{F}$

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\} = \{(x_n, y_n)\}_{n=0}^{\infty}.$$

Symbol $\boldsymbol{F}^n(x, y) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}^{n-1}(x, y))$ nazýváme n-tou iterací zobrazení $\boldsymbol{F}$, 0-tá iterace zobrazení $\boldsymbol{F}$ je identita.

Nejprve se budeme zabývat otázkou určení tzv. rovnovážných a periodických stavů DDS($\boldsymbol{F}$).

Definice

- **Rovnovážný stav** systému (1) (též **pevný bod** vektorového zobrazení $\boldsymbol{F} = (f, g)$) je bod $(\overline{x}, \overline{y})$, který splňuje

$$\begin{aligned} \overline{x} &= f(\overline{x}, \overline{y}), \\ \overline{y} &= g(\overline{x}, \overline{y}). \end{aligned}$$

- **Periodický bod** (x_p, y_p) **s periodou** m je pevný bod zobrazení $\boldsymbol{F}^m$, tj. m-té iterace zobrazení $\boldsymbol{F}$. **Periodický bod** (x_p, y_p) **s primitivní periodou** m je periodický bod s periodou m, kde m je navíc nejmenší kladné číslo s touto vlastností.

- Nechť (x_0, y_0) je daný bod v $\mathbb{R}^2$. Dvojice (x_1, y_1), (x_2, y_2), … definované induktivně pomocí (1) se nazývají **iteracemi** bodu (x_0, y_0) a posloupnost $\{(x_n, y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá **kladnou orbitou** bodu (x_0, y_0) a budeme ji označovat $\gamma^+(x_0, y_0)$. Tedy
$$\gamma^+(x_0, y_0) = \{(x_0, y_0), \boldsymbol{F}(x_0, y_0), \boldsymbol{F}^2(x_0, y_0), \dots, \boldsymbol{F}^k(x_0, y_0), \dots\}.$$
Pro rovnovážný stav $(\overline{x}, \overline{y})$ platí
$$\gamma^+(\overline{x}, \overline{y}) = \{(\overline{x}, \overline{y}), (\overline{x}, \overline{y}), (\overline{x}, \overline{y}), \dots\} = \{(\overline{x}, \overline{y})\},$$
nebo-li orbita je jednobodová.
Pro periodický bod (x_p, y_p) platí
$$\gamma^+(x_p, y_p) = \{(x_p, y_p), (x_{p+1}, y_{p+1}), (x_{p+2}, y_{p+2}), \dots (x_{p+m-1}, y_{p+m-1})\},$$
nebo-li orbita je m-bodová.

Definice

- Pokud k zobrazení $\boldsymbol{F}$ existuje inverzní zobrazení $\boldsymbol{F}^{-1}$, definujeme také **zápornou orbitu** bodu (x_0, y_0), a to takto

$$\gamma^-(x_0, y_0) = (x_0, y_0), \boldsymbol{F}^{-1}(x_0, y_0), \boldsymbol{F}^{-2}(x_0, y_0), \ldots, \boldsymbol{F}^{-k}(x_0, y_0), \ldots,$$

  kde $\boldsymbol{F}^{-n}$ značí n-tou iteraci zobrazení $\boldsymbol{F}^{-1}$.

- Pokud existují jak kladná tak záporná orbita bodu (x_0, y_0), definujme tzv. **úplnou orbitu** $\gamma(x_0, y_0)$ jako sjednocení kladné a záporné orbity. Tedy

$$\gamma(x_0, y_0) = \gamma^+(x_0, y_0) \cup \gamma^-(x_0, y_0).$$

- Bod $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ nazýváme ω**-limitním bodem** kladné orbity $\gamma^+(x_0, y_0)$, pokud existuje posloupnost přirozených čísel n_i takových, že pro $i \to \infty$

$$n_i \to \infty \quad \text{a} \quad \boldsymbol{F}^{n_i}(x_0, y_0) \to (a, b).$$

- Množinu všech ω-limitních bodů orbity $\gamma^+(x_0, y_0)$ nazýváme ω**-limitní množinou** bodu (x_0, y_0) a značíme ji $\omega(x_0, y_0)$.

- V případě, že je zobrazení $\boldsymbol{F}$ invertibilní, definujeme obdobně též α**-limitní množinu** bodu (x_0, y_0) jako množinu všech α-limitních bodů záporné orbity $\gamma^-(x_0, y_0)$, místo přirozených čísel uvažujeme n_i záporná celá čísla.

Podobně jako pro spojité dynamické systémy, je i v případě diskrétních dynamických systémů pro chování systému rozhodující klasifikace rovnovážných stavů z pohledu stability.

Definice

- Rovnovážný stav $(\overline{x}, \overline{y})$ soustavy diferenčních rovnic (1) (tj. pevný bod zobrazení $\boldsymbol{F}$) se nazývá **stabilní**, pokud $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ takové, že pro každý bod (x_0, y_0) splňující $\|(x_0, y_0) - (\overline{x}, \overline{y})\| < \delta$, všechny iterace (x_n, y_n) splňují $\|(x_n, y_n) - (\overline{x}, \overline{y})\| < \varepsilon$. (Připomeňme, že $(x_n, y_n) = \boldsymbol{F}^n(x_0, y_0)$.) Pevný bod $(\overline{x}, \overline{y})$ nazýváme **nestabilní**, pokud není stabilní.

- Rovnovážný stav $(\overline{x}, \overline{y})$ soustavy (1) se nazývá **asymptoticky stabilní**, pokud $\exists r > 0$ takové, že $(x_n, y_n) \to (\overline{x}, \overline{y})$ pro $n \to \infty$ pro všechny (x_0, y_0) splňující $\|(x_0, y_0) - (\overline{x}, \overline{y})\| < r$.

- Periodický bod (x_p, y_p) soustavy (1) s periodou m se nazývá **stabilní**, je-li (x_p, y_p) stabilní pevný bod zobrazení $\boldsymbol{F}^m$. Analogicky definujeme asymptoticky stabilní a nestabilní periodický bod.

Definice

Množinu $M \subseteq \mathbb{R}^2$ nazýváme invariantní množinou zobrazení $\boldsymbol{F}$, pokud platí $\boldsymbol{F}(M) \subseteq M$. Uvědomte si, že v takovém případě každá orbita, která jednou vstoupí do M, zůstane v M „navždy“.

Definice

- Nechť $(\overline{x}, \overline{y})$ je pevný bod zobrazení $\boldsymbol{F} = (f, g)$, kde f, g jsou spojitě diferencovatelné v $(\overline{x}, \overline{y})$. **Jacobiho matice** zobrazení $\boldsymbol{F}$ v bodě $(\overline{x}, \overline{y})$ je matice

$$J_{\mathbf{F}}(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) \end{bmatrix}$$

  Lineární zobrazení $J_{\mathbf{F}}(\overline{x}, \overline{y}) \ : \ \mathbb{R}^2 \ \to \ \mathbb{R}^2$ definované

$$J_{\mathbf{F}}(\overline{x}, \overline{y})(x, y) = J_{\mathbf{F}}\,(\overline{x}, \overline{y}) \cdot (x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) \cdot x & + & \dfrac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) \cdot y \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) \cdot x & + & \dfrac{\partial g}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) \cdot y \end{bmatrix}$$

  se nazývá **linearizací** zobrazení $\boldsymbol{F}$ v pevném bodě $(\overline{x}, \overline{y})$.

- Rovnovážný stav $(\overline{x}, \overline{y})$ zobrazení $\boldsymbol{F}$ se nazývá **hyperbolický**, pokud je jeho linearizace v bodě $(\overline{x}, \overline{y})$ hyperbolická, tj. pokud Jacobiho matice $J_{\mathbf{F}}(\overline{x}, \overline{y})$ nemá žádná vlastní čísla na jednotkové kružnici. Má-li $J_{\mathbf{F}}(\overline{x}, \overline{y})$ alespoň jedno vlastní číslo na jednotkové kružnici, pak říkáme, že rovnovážný stav $(\overline{x}, \overline{y})$ **není hyperbolický**.

Nejdůležitějším výsledkem v oblasti linearizací je následující věta.

Věta (Linearized Stability Theorem) Nechť $\boldsymbol{F} = (f, g)$, je spojitě diferencovatelné zobrazení definované na otevřené množině $W \subseteq \mathbb{R}^2$. Nechť $(\overline{x}, \overline{y}) \in W$ je rovnovážný stav $\boldsymbol{F}$.

- Pokud obě vlastní čísla Jacobiho matice $J_{\mathbf{F}}(\overline{x}, \overline{y})$ leží uvnitř jednotkové kružnice (tj. $|\lambda_1| < 1$ i $|\lambda_2| < 1$), potom je rovnovážný stav $(\overline{x}, \overline{y})$ asymptoticky stabilní.
- Pokud alespoň jedno vlastní číslo Jacobiho matice $J_{\mathbf{F}}(\overline{x}, \overline{y})$ leží vně jednotkové kružnice (tj. $|\lambda_1| > 1$ nebo $|\lambda_2| > 1$), potom je rovnovážný stav $(\overline{x}, \overline{y})$ nestabilní.

Definice

- Je-li hyperbolický rovnovážný stav $(\overline{x}, \overline{y})$ soustavy (1) asymptoticky stabilní, tj. obě vlastní čísla Jacobiho matice $J_{\mathbf{F}}(\overline{x}, \overline{y})$ leží uvnitř jednotkové kružnice, potom existuje otevřené okolí $\mathcal{O}(\overline{x}, \overline{y})$ takové, že kladné iterace všech bodů z $\mathcal{O}(\overline{x}, \overline{y})$ konvergují k danému rovnovážnému stavu $(\overline{x}, \overline{y})$. Tedy pro všechny body $(a, b) \in \mathcal{O}(\overline{x}, \overline{y})$ platí
$$\boldsymbol{F}^n(a, b) \to (\overline{x}, \overline{y}) \quad \text{pro} \quad n \to \infty.$$
Takovýto rovnovážný stav nazýváme **atraktor** (anglicky **sink**).
- Pokud obě vlastní čísla linearizace $\boldsymbol{F}$ v rovnovážném stavu $(\overline{x}, \overline{y})$ leží vně jednotkové kružnice, potom existuje otevřené okolí $\mathcal{O}(\overline{x}, \overline{y})$ takové, že zpětné iterace všech bodů z $\mathcal{O}(\overline{x}, \overline{y})$ konvergují k $(\overline{x}, \overline{y})$. Takovýto rovnovážný stav nazýváme **repelor** (anglicky **source** nebo **repeller**).
- Leží-li jedno vlastní číslo linearizace $J_{\mathbf{F}}(\overline{x}, \overline{y})$ uvnitř jednotkové kružnice a jedno vně jednotkové kružnice, potom v každém otevřeném okolí $\mathcal{O}(\overline{x}, \overline{y})$ existují body, jejichž kladné iterace konvergují k $(\overline{x}, \overline{y})$, zatímco zpětné iterace jiných bodů z $\mathcal{O}(\overline{x}, \overline{y})$ konvergují k $(\overline{x}, \overline{y})$. Takovýto rovnovážný stav nazýváme **sedlo** (anglicky **saddle**).