Řešení modelu diskrétního dynamického systému Lotka-Volterra

1. Model

Zobecněný model diskrétního dynamického systému Lotka-Volterra je popsán soustavou dvou diferenčních rovnic

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \mathrm{e}^{r - r x_n - s y_n} \\ y_{n+1} &= y_n \mathrm{e}^{r - r y_n - s x_n}, \ n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $s > 0,\ r > 0$ jsou parametry.

2. Pevné body

Definujme funkce

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x \mathrm{e}^{r - r x - s y} \\ g(x, y) &= y \mathrm{e}^{r - r y - s x}. \end{aligned}$$

Hledáme pevné body zobrazení $\boldsymbol{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$, t.j. body (x, y) splňující rovnice

$$\begin{aligned} x &= f(x, y) \\ y &= g(x, y). \end{aligned}$$

Předpokládejme, že $r \neq s$. Dostaneme pevné body

$$S_0 = (0, 0),\ S_1 = (1, 0),\ S_2 = (0, 1),\ S_4 = \left(\frac{r}{r+s}, \frac{r}{r+s} \right).$$

Pevným bodům odpovídají stacionární řešení

$$S_0: \begin{array}{rcl} x_n &=& 0 \\ y_n &=& 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{array} \qquad S_1: \begin{array}{rcl} x_n &=& 1 \\ y_n &=& 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{array}$$

$$S_2\mathbf{:} \begin{array}{rcl} x_n &=& 0 \\ y_n &=& 1 \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{array} \qquad S_3: \begin{array}{rcl} x_n &=& \frac{r}{r+s} \\ y_n &=& \frac{r}{r+s} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{array}$$

2.1. Stabilita pevných bodů

Nejdříve si vypočteme Jakobiho matici zobrazení $\boldsymbol{F}$:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} e^{r-rx-sy}(1-rx) & -e^{r-rx-sy}(sx) \\ -e^{r-ry-sx}(sy) & e^{r-ry-sx}(1-ry) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

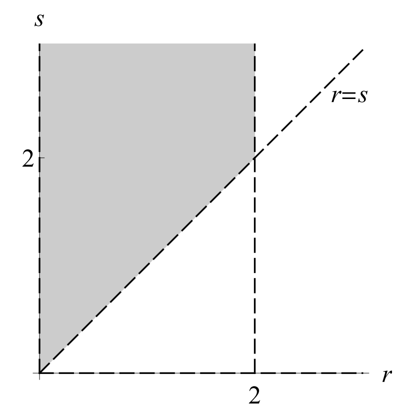
Nyní vypočteme vlastní čísla Jakobiho matice v jednotlivých pevných bodech a určíme stabilitu příslušného stacionárního řešení.

$S_0 = (0, 0): \ J_0 = J(0, 0) = \begin{bmatrix} e^r & -e^r \\ -e^r & e^r \end{bmatrix}$. Vlastní čísla $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2e^r$. Je-li $r > 0$ je $2e^r > 2$ a stacionární řešení $x_n = 0, \ y_n = 0, \ n \in \mathbb{N}_0$ je tedy nestabilní.

$S_1 = (1, 0): \ J_1 = J(1, 0) = \begin{bmatrix} 1-r & -s \\ 0 & e^{r-s} \end{bmatrix}$. Vlastní čísla $\lambda_1 = e^{r-s}, \ \lambda_2 = 1 - r$. Je-li $0 < r < 2$ je $-1 < \lambda_2 < 1$. Je-li $r < s$ je $-1 < \lambda_1 < 1$. Stacionární řešení $x_n = 1, \ y_n = 0, \ n \in \mathbb{N}_0$ je tedy stabilní pro $r < 2 \wedge r < s$.

$S_2 = (0, 1): \ J_2 = J(0, 1) = \begin{bmatrix} e^{r-s} & 0 \\ -s & 1-r \end{bmatrix}$. Vlastní čísla $\lambda_1 = e^{r-s}, \ \lambda_2 = 1 - r$. Stacionární řešení $x_n = 0, \ y_n = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ je tedy také stabilní pro $r < 2 \ \wedge \ r < s$.

Oblast stability stacionárního řešení odpovídající pevnému bodu $S_1,\ S_2$ je na následujícím obrázku.



$S_3 = (\frac{r}{r+s}, \frac{r}{r+s}):\ J_3 = J(\frac{r}{r+s}, \frac{r}{r+s}) = \begin{bmatrix} \frac{r-r^2+1}{r+s} & -\frac{rs}{r+s} \\ -\frac{rs}{r+s} & \frac{r-r^2+1}{r+s} \end{bmatrix}$. Vlastní čísla $\lambda_1 = 1-r,\ \lambda_2 = \frac{r-r^2+s+rs}{r+s}$. Je-li $0 < r < 2$ je $-1 < \lambda_1 < 1$. Zjistíme, kdy $-1 < \lambda_2 < 1$.

$$-1 < \lambda_2 < 1$$

$$-r-s < r-r^2+s+rs < r+s$$

$$-2r-2s < -r^2+rs < 0$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

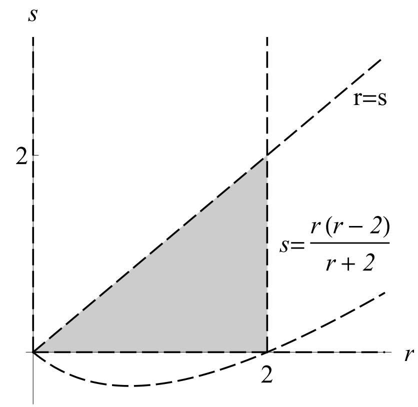
$$0 < 2r - r^2 + 2s + rs \qquad\qquad s - r < 0$$

$$s > \frac{r^2-2r}{r+2} \qquad\qquad s < r$$

pro $r < 2$ splněno vždy.

Stacionární řešení $x_n = \frac{r}{r+s},\ y_n = \frac{r}{r+s},\ n \in \mathbb{N}_0$ je tedy stabilní pro $s < r < 2$.

Oblast stability stacionárního řešení odpovídající pevnému bodu S_3 je na následujícím obrázku.



3. Dvojperiodické body

Hledáme pevné body zobrazení $\boldsymbol{F}^2(x,y) = (f(f(x,y),g(x,y)),g(f(x,y),g(x,y)))$, t.j. body (x,y) splňující rovnice

$$\begin{aligned} x &= f(f(x,y),g(x,y)) \\ y &= g(f(x,y),g(x,y)). \end{aligned}$$

t.j.

$$\begin{aligned} x &= x\mathrm{e}^{r-rx-sy}\mathrm{e}^{r-rx\mathrm{e}^{r-rx-sy}-sy\mathrm{e}^{r-sx-ry}} \\ y &= y\mathrm{e}^{r-sx-ry}\mathrm{e}^{r-ry\mathrm{e}^{r-sx-ry}-sx\mathrm{e}^{r-rx-sy}}. \end{aligned}$$

Vyloučíme-li pevné body $S_0 = (0, 0)$, $S_1 = (1, 0)$, $S_2 = (0, 1)$ dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} 2r - rx(1 + \mathrm{e}^{r-rx-sy}) - sy(1 + \mathrm{e}^{r-sx-ry}) &= 0 \\ 2r - ry(1 + \mathrm{e}^{r-sx-ry}) - sx(1 + \mathrm{e}^{r-rx-sy}) &= 0. \end{aligned}$$

Předpokládejme nejdříve, že $r \neq s$. Provedeme substituci

$$\begin{aligned} 2X &= r - rx - sy \\ 2Y &= r - ry - sx\,, \end{aligned}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} 2r - rx(1 + \mathrm{e}^{2X}) - sy(1 + \mathrm{e}^{2Y}) &= 0 \\ 2r - ry(1 + \mathrm{e}^{2Y}) - sx(1 + \mathrm{e}^{2X}) &= 0. \end{aligned}$$

Vynásobíme-li první rovnici s a druhou r a odečteme je, dostaneme

$$2r(s - r) - (s^2 - r^2)(1 + \mathrm{e}^{2Y})y = 0\,. \tag{3}$$

Protože platí

$$2(rY - sX) = -(s^2 - r^2) - r(s - r\,.)$$

Dosazením tohoto vztahu do rovnice (3) dostaneme

$$2r(s - r) - 2(rY - sX)(1 + \mathrm{e}^{2Y}) - r(s - r)(1 + \mathrm{e}^{2Y}) = 0\,,$$

dalšími úpravami dostáváme

$$\begin{aligned}
2(rY - sX)(1 + \mathrm{e}^{2Y}) &= r(s-r)(1 - \mathrm{e}^{2Y}) \\
sX - ry &= \frac{(\mathrm{e}^{2Y} - 1)}{2(\mathrm{e}^{2Y} + 1)} r(s-r) \\
sX - ry &= \frac{\mathrm{tgh} X}{2} r(s-r) \\
X &= \frac{r}{s}(Y + \frac{\mathrm{tgh} Y}{2}(s-r)) \,.
\end{aligned}$$

Podobným postupem dostaneme rovnici

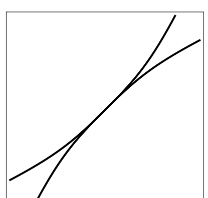
$$Y = \frac{r}{s}(X + \frac{\mathrm{tgh} X}{2}(s-r)) \,.$$

Označíme-li $g(u) = \dfrac{r}{s}\left(u + (s-r)\dfrac{\mathrm{tgh}\, u}{2}\right)$, bod (X, Y) splňuje rovnice:

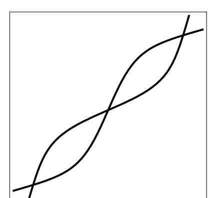
$$\begin{aligned}
X &= g(Y) \\
Y &= g(X) \,,
\end{aligned} \tag{4}$$

Zobrazíme si křivky, jejíž body splňují tyto rovnice, mohou nastat čtyři případy:

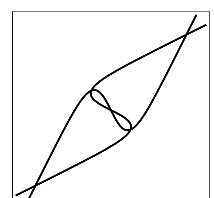
a)



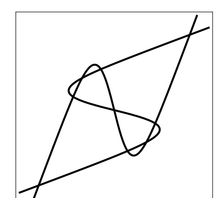
b)



c)



d)



Případ a) řešením soustavy (4) je pouze bod $(0,0)$ což odpovídá pevnému bodu $S_3 = (\frac{r}{r+s}, \frac{r}{r+s})$ a můžeme ho vyloučit. Tento případ nastane pro $r \leq 2$ (viz případ b)).

Případ b) řešením soustavy (4) jsou pouze body $(0,0)$, (X_0, X_0), $(-X_0, -X_0)$, kde $X_0 >$ splňuje rovnici $X_0 = g(X_0)$ t.j.

$$X_0 = \frac{r}{2}\mathrm{tgh}(\mathrm{X}_0).$$

Tato rovnice má nenulové řešení jestliže $r > 2$.

Tento případ nastane jestliže $r > 2$ a $s \geq \dfrac{r(r-2)}{r+2}$ (viz případ c)).

Případ c) řešením soustavy (4) jsou kromě bodů uvedených v případě b) i body ležící na ose II. a III. kvadrantu, tedy body $(X_1, -X_1)$, $(-X_1, X_1)$, kde X_1 splňuje rovnici

$$-X_1 = g(X_1)$$

t.j,

$$X_1 = \frac{r(r-s)}{2(s+r)}\mathrm{tgh}(\mathrm{X}_1).$$

Tato rovnice má nenulové řešení je-li

$$\frac{r(r-s)}{2(s+r)} > 1$$

t.j.

$$s < \frac{r(r-2)}{r+2}.$$

Tento případ nastane pro $s < \dfrac{r(r-2)}{r+2}$ a $s \geq \psi(r)$ (viz případ d)).

Případ d) řešením soustavy (4) jsou kromě bodů uvedených v případě c) i body (X_2, Y_2), (Y_2, X_2), $(-X_2, -Y_2)$, $(-Y_2, -X_2)$, kde $X_2 > 0$, $Y_2 > 0$ splňují rovnice

$$\begin{aligned} X_2 &= g(Y_2) \\ Y_2 &= g(X_2)\,. \end{aligned}$$

Tyto rovnice budou mít řešení typu (X_2, Y_2) jestliže směrnice tečny ke grafu funkce $Y = g(X)$ v bodě $(X_1, -X_1)$ je větší než 1. Najdeme funkci $s = \psi(r)$, takovou že, pro hodnoty parametrů $r, s = \psi(r)$ bude směrnice rovna 1 tj. $g'(X_1) = 1$. Dostaneme

$$\frac{r}{s}\left(1 + \frac{s-r}{2}\mathrm{sech}^2(X_1)\right) = 1.$$

Zároveň pro X_1 platí

$$X_1 = \frac{r}{s}\left(-X_1 - \frac{s-r}{2}\mathrm{tgh}(X_1)\right).$$

Z těchto vztahů dostaneme dvě rovnice (druhou rovnici dosadíme do první a vyjádříme r, z druhé rovnicet vyjádříme s)

$$\begin{aligned} r &= 2\cosh^2(X_1) \\ s &= r\frac{r\,\mathrm{tgh}(X_1) - 2\,X_1}{r\,\mathrm{tgh}(X_1) + 2\,X_1}\,. \end{aligned}$$

Dostali jsme parametrické rovnice křivky C_1, která odpovídá grafu funkce $s = \psi(r)$.
Křivku $s = \psi(r)$ mohu tedy vyjádřit parametricky

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1:\ r &= 2\cosh^2 t \\ s &= 2\cosh^2 t\,\frac{2\cosh^2 t\,\mathrm{tgh}\,t - 2\,t}{2\cosh^2 t\,\mathrm{tgh}\,t + 2\,t} \quad t > 0\,. \end{aligned}$$

Případ d) nastane pro $s < \psi(r)$.

Tím jsme vyřešili všechny případy řešení soustavy rovnic (4). Nyní najdeme odpovídající dvojperiodické body diskrétního dynamického systému (1).

Bodům (X_0, X_0), $(-X_0, -X_0)$ odpovídají dvojperiodické body

$$R_0 = (x_0, y_0) = \left(\frac{r}{r+s}(1 \mp \operatorname{tgh}(X_0), \frac{r}{r+s}(1 \mp \operatorname{tgh}(X_0)\right), \text{ kde } X_0 = \frac{r}{2}\operatorname{tgh}(\mathrm{X}_0).$$

Bodům $(X_1, -X_1)$, $(-X_1, X_1)$ odpovídají dvojperiodické body

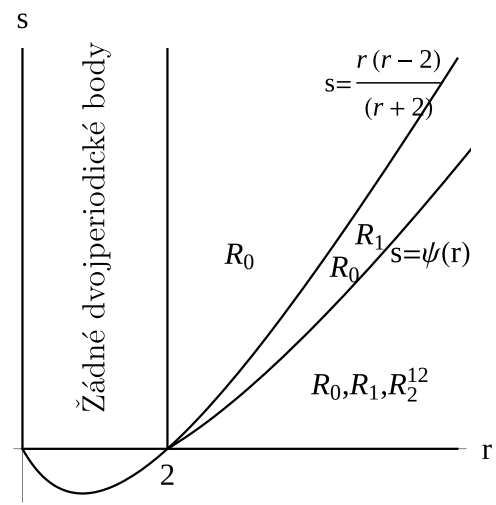
$$R_1 = (x_1, y_1) = \left(\frac{r}{r+s}(1 \mp \operatorname{tgh}(X_1), \frac{r}{r+s}(1 \pm \operatorname{tgh}(X_1)\right), \text{ kde } X_1 = \frac{r(r-s)}{2(s+r)}\operatorname{tgh}(\mathrm{X}_1).$$

Bodům (X_2, Y_2), (Y_2, X_2), $(-X_2, -Y_2)$, $(-Y_2, -X_2)$ odpovídají dvojperiodické body

$$R_2^1 = (x_2, y_2) = \left(\frac{r}{r+s}(1 \mp \operatorname{tgh}(X_2), \frac{r}{r+s}(1 \mp \operatorname{tgh}(Y_2)\right),$$

$$R_2^2 = (x_2, y_2) = \left(\frac{r}{r+s}(1 \mp \operatorname{tgh}(Y_2), \frac{r}{r+s}(1 \mp \operatorname{tgh}(X_2)\right), \text{ kde } \begin{array}{rcl} X_2 & = & g(Y_2) \\ Y_2 & = & g(X_2)\,. \end{array}$$

Na následujícím obrázku je znázorněno, v kterých množinách existují jednotlivé dvojperiodické body.



3.1. Stabilita dvojperiodických bodů

Vypočteme si Jakobiho matici zobrazení $\boldsymbol{F}^2(x, y)$. Označme

$$u_1 = 2r - rx(1 + \mathrm{e}^{r-rx-sy}) - sy(1 + \mathrm{e}^{r-sx-ry})$$

$$u_2 = 2r - ry(1 + \mathrm{e}^{r-sx-ry}) - sx(1 + \mathrm{e}^{r-rx-sy})$$

potom

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(f(x,y),g(x,y))}{\partial x} &= \mathrm{e}^{u_1} + x\mathrm{e}^{u_1}(-r(1+\mathrm{e}^{r-rx-sy}) + \mathrm{e}^{r-rx-sy}r^2x + \mathrm{e}^{r-sx-ry}s^2y)\\
\frac{\partial f(f(x,y),g(x,y))}{\partial y} &= x\mathrm{e}^{u_1}(-s-\mathrm{e}^{r-sx-ry}(s-rsy) + \mathrm{e}^{r-rx-sy}rsx)\\
\frac{\partial g(f(x,y),g(x,y))}{\partial x} &= y\mathrm{e}^{u_2}(-s-\mathrm{e}^{r-rx-sy}(s-rsx) + \mathrm{e}^{r-sx-ry}rsy)\\
\frac{\partial g(f(x,y),g(x,y))}{\partial y} &= \mathrm{e}^{u_2} + y\mathrm{e}^{u_2}(-r-\mathrm{e}^{r-sx-ry}(r-r^2y) + \mathrm{e}^{r-rx-sy}s^2x).
\end{aligned}
$$

Pro všechny dvojperiodické body platí, že $u_1 = 0$ a $u_2 = 0$. Vyšetřeme nyní stabilitu jednotlivých dvojperiodických bodů.

Dvojperiodický bod R_0
Jakobiho matice má tvar

$$
J(R_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix},
$$

kde

$$
\begin{aligned}
A &= 1 - rx_0(1+\mathrm{e}^{\pm 2X_0}) + (r^2+s^2)x_0^2(\mathrm{e}^{\pm 2X_0})\\
B &= -sx_0(1+\mathrm{e}^{\pm 2X_0}) + 2rsx_0^2\mathrm{e}^{\pm 2X_0})
\end{aligned}
$$

Připomeňme, že $x_0 = y_0$, $2X_0 = r - x_0(r+s)$ a $X_0 = \frac{r}{2}\mathrm{tgh}X_0$.
Vlastní čísla matice $J(R_0)$ jsou $\lambda_1 = A+B$ a $\lambda_2 = A-B$. Platí tedy

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 - x_0(r+s)(1+\mathrm{e}^{\pm 2X_0}) + (r+s)^2x_0^2(\mathrm{e}^{\pm 2X_0}),\\
\lambda_2 &= 1 - x_0(r-s)(1+\mathrm{e}^{\pm 2X_0}) + (r-s)^2x_0^2(\mathrm{e}^{\pm 2X_0}).
\end{aligned}
$$

Ze vztahů $2X_0 = r - x_0(r+s)$ a $X_0 = \frac{r}{2}\mathrm{tgh}X_0$ plyne

$$x_0(r+s) \;=\; r(1 \mp \mathrm{tgh}X_0)$$

Využitím tohoto vztahu a toho, že platí

$$(1 \mp \mathrm{tgh}X_0)(1 + \mathrm{e}^{\pm 2X_0}) \;=\; 2$$

dostáváme

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 - 2\,r \,+\, r^2\mathrm{sech}^2 X_0,\\ \lambda_2 &= 1 - 2\,r\frac{r-s}{r+s} \,+\, r^2\left(\frac{r-s}{r+s}\right)^2 \mathrm{sech}^2 X_0\end{aligned}$$

Zjistíme pro která r, s je $|\lambda_1| < 1$.

$$-1 < 1 - 2\,r \,+\, r^2\mathrm{sech}^2 X_0 < 1$$

$\swarrow$ $\searrow$

a) $2 - 2\,r \,+\, r^2\mathrm{sech}^2\mathrm{X}_0 > 0$

b) $-\,2\,r \,+\, r^2\mathrm{sech}^2 X_0 < 0$

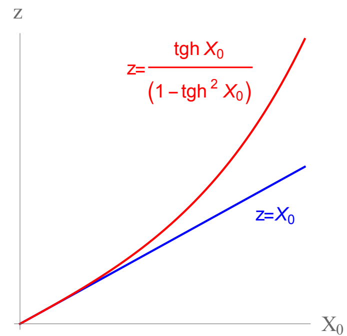
tj. $-\,2 \,+\, r\,\mathrm{sech}^2 X_0 < 0.$

Vyšetříme nejdříve případ b).

Dosadíme-li za $r = \frac{2\,X_0}{\mathrm{tgh}X_0}$ $(X_0 > 0)$, dostaneme

$$X_0 < \frac{\mathrm{tgh}X_0}{1 - \mathrm{tgh}^2 X_0}.$$

Tento vztah je splněn vždy. Nakreslete si obrázek.

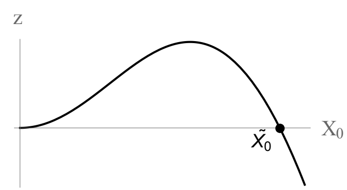


Nyní vyšetříme případ a).

Dosadíme-li za $r = \frac{2\,X_0}{\mathrm{tgh} X_0}$ $(X_0 > 0)$, dostaneme

$$0 < (1 - 2X_0^2)\mathrm{tgh}^2\mathrm{X}_0 - 2X_0\mathrm{tgh}X_0 + 2X_0^2. \tag{5}$$

Nakresleme si graf funkce $z = (1 - 2X_0^2)\mathrm{tgh}^2\mathrm{X}_0 - 2X_0\mathrm{tgh}X_0 + 2X_0^2$:



Pomocí nějakého matematického software si vypočteme hodnotu $\tilde{X}_0$. Vyjde nám hodnota $\tilde{X}_0 \doteq 0,912429$, odpovídající hodnota pro r je $r_0 \doteq 2,52647$. Protože funkce $r = \frac{2\,X_0}{\mathrm{tgh} X_0}$ je rostoucí, platí: je-li nerovnost (5) splněna pro $X_0 < \tilde{X}_0$, je nerovnost $2 - 2\,r\, + \,r^2\mathrm{sech}^2\mathrm{X}_0 > 0$ splněna pro $r < r_0$.

Platí tedy:

$$-1 < \lambda_1 < 1 \text{ právě tehdy, když } r < r_0, \text{ kde } r_0 \doteq 2,52647.$$

Nyní si zjistíme pro která r, s je $|\lambda_2| < 1$.

$$-1 < 1 - 2\,r\frac{r-s}{r+s} + r^2\left(\frac{r-s}{r+s}\right)^2 \operatorname{sech}^2 X_0 < 1$$

$$\swarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \searrow$$

$$\text{a) } 2 - 2\,r\frac{r-s}{r+s} + r^2\left(\frac{r-s}{r+s}\right)^2 \operatorname{sech}^2 \mathrm{X}_0 > 0 \qquad\qquad \text{b) } -2\,r\frac{r-s}{r+s} + r^2\left(\frac{r-s}{r+s}\right)^2 \operatorname{sech}^2 X_0 < 0$$

Vyšetříme nejdříve případ b).

Pro $r \le s$ není nerovnost nikdy splněna. Nadále budeme uvažovat jen případ $r > s$.
Dosadíme-li za $r = \frac{2\,X_0}{\operatorname{tgh} X_0}$ $(X_0 > 0)$, dostaneme

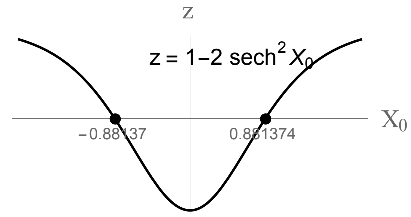
$$X_0 < \frac{\operatorname{tgh} X_0}{1 - \operatorname{tgh}^2 X_0}\frac{r+s}{r-s}.$$

Protože $\frac{r+s}{r-s} > 1$ je předchozí nerovnost splněna vždy (pro $r > s$).

Nyní vyšetříme případ a).

Je-li $r \le s$ nerovnost platí. Stačí vyšetřit případ $r > s$. Je-li $1 - 2\operatorname{sech}^2 X_0 < 0$ (diskriminant příslušné kvadratické rovnice je záporný) nerovnice platí také.

To nastane pro $X_0 \in (-\tilde{\tilde{X}}_0; \tilde{\tilde{X}}_0)$, kde $\tilde{\tilde{X}}_0 \doteq 0,881374$ (viz následující obrázek).



Tento případ tedy nastane pro $r < r_1$, kde $r1 \doteq 2,4929$.
Nechť tedy $r \geq r_1$, potom najdeme křivku pro kterou platí rovnost

$$2 - 2\,r\frac{r-s}{r+s} + r^2\left(\frac{r-s}{r+s}\right)^2 \operatorname{sech}^2 \mathrm{X}_0 = 0.$$

Vyřešením kvadratické rovnice dostaneme

$$r\frac{r-s}{r+s} \;=\; \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\operatorname{sech}^2 X_0}}{\operatorname{sech}^2 X_0}.$$

Vypočteme s:

$$s \;=\; r\,\frac{r - \frac{1 \pm \sqrt{1-2\operatorname{sech}^2 X_0}}{\operatorname{sech}^2 X_0}}{r + \frac{1 \pm \sqrt{1-2\operatorname{sech}^2 X_0}}{\operatorname{sech}^2 X_0}}.$$

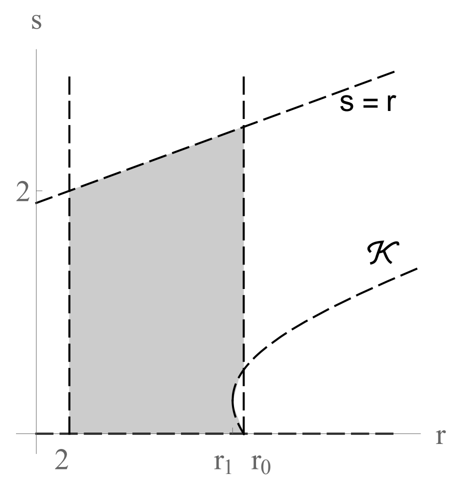
Nyní definujme křivku $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2$, kde

$$\mathcal{K}_{12}: \; r(t) = \frac{2\,t}{\operatorname{tgh} t}$$

$$s(t) = \frac{2\,t}{\operatorname{tgh} t} \frac{\frac{2\,t}{\operatorname{tgh} t} - \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\operatorname{sech}^2 t}}{\operatorname{sech}^2 t}}{\frac{2\,t}{\operatorname{tgh} t} + \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\operatorname{sech}^2 t}}{\operatorname{sech}^2 t}}, \qquad t \in \langle t_0, \infty), \text{ kde } t_0 \doteq 0,881374\,.$$

Pro body (r, s) ležící nalevo od křivky $\mathcal{K}$ a $s < r$ platí $-1 < \lambda_2 < 1$.

Závěr: Dvojperiodický bod R_0 je stabilní jestliže body (r, s) leží nalevo od křivky $\mathcal{K}$ a $s < r \;\wedge\; r < r_0$ ($r_0 \doteq 2.52647$). Opět si oblast stability dvojperiodického bodu R_0 zobrazíme graficky:



Dvojperiodický bod R_1
Jakobiho matice má tvar

$$J(R_1) = \begin{pmatrix} A \mp B & (C \pm E)\mathrm{e}^{\mp 2 X_1} \\ (C \mp E)\mathrm{e}^{\pm 2 X_1} & A \pm B \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2\frac{r^2 s^2}{(r+s)^2} - \frac{2r^2}{(r+s)} + r^2 \frac{(r-s)\mathrm{sech}^2(X_1)}{r+s} \\ B &= \frac{2r^2 s^2 \mathrm{tgh}(X_1)}{(r+s)^2} \\ C &= \frac{2r^3 s}{(r+s)^2} - \frac{2rs}{r+s} \\ E &= \frac{2\, r^3 s\, \mathrm{tgh}(X_1)}{(r+s)^2} \end{aligned}$$

Podrobný výpočet konstant A, B, C, E je v souboru **LV-stab-per-X1.nb** (soubor programu *Mathematica*).
Charakteristický polynom pro matici $J(R_1)$ je

$$\lambda^2 - 2\, A\, \lambda + A^2 - B^2 - C^2 + E^2$$

Výpočet determinantu matice $J(R_1)$, t.j. $A^2 - B^2 - C^2 + E^2$ je opět v souboru **LV-stab-per-X1.nb**. Charakteristickou rovnici můžeme tedy psát

$$\lambda^2 - \sigma\, \lambda + \Delta = 0,$$

kde

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(1 - \frac{2r^2}{(r+s)} + r^2 \frac{(r-s)\mathrm{sech}^2(X_1)}{r+s}\right)^2, \\ \sigma &= 2\left(1 + 2\frac{r^2 s^2}{(r+s)^2} - \frac{2r^2}{(r+s)} + r^2 \frac{(r-s)\mathrm{sech}^2(X_1)}{r+s}\right) = 2\, A, \end{aligned}$$

a $X_1 > 0$ řeší rovnici

$$X_1 = \frac{r}{2}\frac{r-s}{r+s}\mathrm{tgh} X_1.$$

Nejdříve zjistíme, kdy je diskriminant záporný. Diskriminant je záporný, když $16\frac{r^2s^2}{(r+s)^2}(A-\frac{r^2s^2}{(r+s)^2}) < 0$, tj $A-\frac{r^2s^2}{(r+s)^2} < 0$. Najdeme křivku, pro kterou platí

$$A - \frac{r^2s^2}{(r+s)^2} = 0. \tag{6}$$

Víme, že

$$s = r\frac{r\,\mathrm{tgh}(X_1) - 2\,X_1}{r\,\mathrm{tgh}(X_1) + 2\,X_1}.$$

Dosadíme za X_1 parametr t a dosadíme do rovnice (6) a vypočteme r (viz výpočty v souboru **LV-stab-per-X1.nb**). Dostaneme parametrické rovnice křivky:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2: \; r &= \frac{2t}{\mathrm{tgh}t}\left[\mathrm{tgh}t + \sqrt{\mathrm{tgh}^2 t + \frac{\mathrm{tgh}t}{t} - 1}\right]^2 \\ s &= r\,\frac{r\,\mathrm{tgh}\,t - 2\,t}{r\,\mathrm{tgh}\,t + 2\,t} \qquad\qquad t > 0\,. \end{aligned}$$

Jestliže (r, s) leží pod křivkou $\mathcal{C}_2$ jsou vlastní čísla Jakobiho matice $J(x_1, y_1)$ komplexní. Nyní vyšetříme stabilitu dvojperiodických bodů $R_1 = (x_1, y_1)$. Vlastní čísla Jakobiho matice $J(x_1, y_1)$, za předpokladu, že $A - \frac{r^2s^2}{(r+s)^2} \geq 0$, jsou

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= A + 2\frac{r\,s}{r+s}\sqrt{A - \frac{r^2s^2}{(r+s)^2}} \\ \lambda_2 &= A - 2\frac{r\,s}{r+s}\sqrt{A - \frac{r^2s^2}{(r+s)^2}} \end{aligned}$$

tj.

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 + \frac{2\,r^2 s^2}{(r+s)^2} - \frac{2r^2}{(r+s)} + r^2\frac{(r-s)\operatorname{sech}^2(X_1)}{r+s} + \\
&\quad \frac{2\,r\,s}{r+s}\sqrt{1 + \frac{r^2 s^2}{(r+s)^2} - \frac{2r^2}{(r+s)} + r^2\frac{(r-s)\operatorname{sech}^2(X_1)}{r+s}} \\
\lambda_2 &= 1 + \frac{2\,r^2 s^2}{(r+s)^2} - \frac{2r^2}{(r+s)} + r^2\frac{(r-s)\operatorname{sech}^2(X_1)}{r+s} - \\
&\quad \frac{2\,r\,s}{r+s}\sqrt{1 + \frac{r^2 s^2}{(r+s)^2} - \frac{2r^2}{(r+s)} + r^2\frac{(r-s)\operatorname{sech}^2(X_1)}{r+s}}
\end{aligned}
$$

Označme $G = (g_r, g_s)$ společný bod křivek $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$. Pro oblast mezi křivkami $\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$ a pro $r < g_r$ a $s < g_s$ platí, že $\frac{r}{s}(1 + \frac{s-r}{2}\operatorname{sech}^2(X_1)) > 1$ a tedy $-\frac{2r^2}{(r+s)} + r^2\frac{(r-s)\operatorname{sech}^2(X_1)}{r+s} < -\frac{2\,r\,s}{r+s}$. Pro λ_1 platí

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &< 1 + \frac{2\,r^2 s^2}{(r+s)^2} - \frac{2\,r\,s}{r+s} + \frac{2\,r\,s}{r+s}\sqrt{1 + \frac{r^2 s^2}{(r+s)^2} - \frac{2\,r\,s}{r+s}} \\
&\quad 1 + \frac{2\,r^2 s^2}{(r+s)^2} - \frac{2\,r\,s}{r+s} + \frac{2\,r\,s}{r+s}\left(1 - \frac{r\,s}{r+s}\right) < 1.
\end{aligned}
$$

Protože platí, $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ je v této oblasti dvojperiodický bod $R_1 = (x_1, y_1)$ stabilní.
Pro oblast mezi křivkami $\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$ a pro $r > g_r$ a $s > g_s$ platí, že $\frac{r}{s}(1 + \frac{s-r}{2}\operatorname{sech}^2(X_1)) < -1$ a tedy

$$
-\frac{2r^2}{(r+s)} + r^2\frac{(r-s)\operatorname{sech}^2(X_1)}{r+s} > \frac{2\,r\,s}{r+s}
$$

.

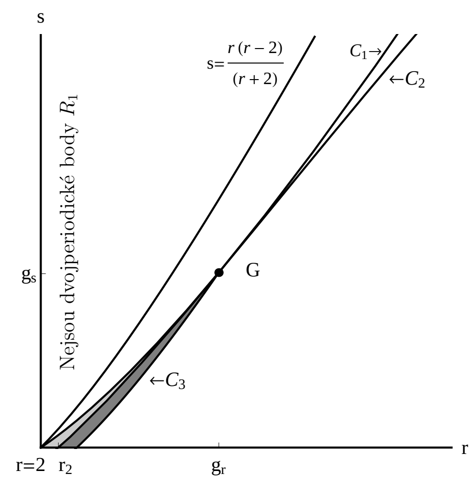
Pro λ_2 platí

$$\lambda_1 \;>\; 1+\frac{2\,r^2s^2}{(r+s)^2}-\frac{2\,r\,s}{r+s}+\frac{2\,r\,s}{r+s}\sqrt{1+\frac{r^2s^2}{(r+s)^2}-\frac{2\,r\,s}{r+s}} > 1+\frac{2\,r^2s^2}{(r+s)^2}-\frac{2\,r\,s}{r+s}+\frac{2\,r\,s}{r+s}\left(1-\frac{r\,s}{r+s}\right) \;>\; 1.$$

Protože platí, $\lambda_2 < \lambda_1$ je v této oblasti dvojperiodický bod $R_1 = (x_1, y_1)$ nestabilní.
Stačí vyšetřit případ komplexních vlastních čísel. Dá se dokázat, že $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ pro (r, s) ležící na křivce $\mathcal{C}_3$.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_3:\; r &= 2\cosh t\,\frac{t\cosh t\;-\;\sinh t}{2t\;-\;\sinh t\cosh t} \\ s &= r\,\frac{r\,\mathrm{tgh}\,t-2\,t}{r\,\mathrm{tgh}\,t+2\,t} \qquad\qquad t>0\,. \end{aligned}$$

Na následujícím obrázku je zobrazena oblast stability dvojperiodických bodů $R_1 = (x_1, y_1)$.



Pro světle šedou oblast platí $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$, pro tmavě šedou oblast $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2,\;\; |\lambda_1| < 1$. Bod dotyku křivek $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ je $G \doteq (4.6, 1.28)$ a $r_2 \doteq 2.2564$.

Stabilitu periodických bodů R_2 již nebudeme vyšetřovat, výpočty jsou již hodně komplikované.

4. Případ $r = s$

Zbývá vyřešit případ kdy $r = s$. Dostaneme pevné body

$$S_0 = (0,0),\ S_1 \in \{(x,y)|x+y=1\}).$$

4.1. Stabilita pevných bodů

$S_0 = (0,0):\ J_0 = J(0,0) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^r & -\mathrm{e}^r \\ -\mathrm{e}^r & \mathrm{e}^r \end{bmatrix}$. Vlastní čísla $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2\mathrm{e}^r$. Je-li $r > 0$ je $2\mathrm{e}^r > 2$ a stacionární řešení $x_n = 0,\ y_n = 0,\ n \in \mathbb{N}_0$ je tedy nestabilní.

$S_1 = (x, 1-x):\ J_1 = J(x,1-x) = \begin{bmatrix} 1 - rx & -rx \\ -r(1-x) & 1 - r(1-x) \end{bmatrix}$.

Vlastní čísla $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1 - r$. Je-li $0 < r < 2$ je $-1 < \lambda_2 < 1$, ale $\lambda_1 = 1$, pevný bod tedy není hyperbolický. Stacionární řešení $x_n = x,\ y_n = 1-x,\ n \in \mathbb{N}_0$ není stabilní. Budeme-li ale v blízkosti úsečky $x + y = 1$, $0 \le x \le 1$ vždy skončíme v některém ze stacionárních řešení.

4.2. Ddvojperiodické body

Je dobré si všimnout, že v případě $r = s$ jsou polopřímky $y = a\,x$, kde $a \in \mathbb{R}^+$ a $x > 0$, invariantní množiny zobrazení $\boldsymbol{F}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$, kde

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x\mathrm{e}^{r-rx-ry} \\ g(x,y) &= y\mathrm{e}^{r-ry-rx}. \end{aligned}$$

Všechny dvojperiodické body leží tedy na těchto polopřímkách. Dosadíme-li $y = ax$ do $x = f(f(x,y), g(x,y))$ dostaneme rovnici

$$x = x\mathrm{e}^{r(1-x(1+a))+r(1-x(1+a)\mathrm{e}^{r(1-x(1+a))})}.$$

Označíme-li $2X = r(1-x(1+a))$ platí pro X rovnice

$$X = \frac{r}{2}\mathrm{tgh}(X).$$

Pro $r \leq 2$ existuje pouze nulové řešení této rovnice, to odpovídá pevným bodům $S_1 = (x, 1-x) = (\frac{1}{1+a}, \frac{a}{1+a})$.
Pro $r > 2$ existuje nenulové řešení $\pm X_0$, tomu odpovídá dvojperiodický bod $R_0 = (x_0, y_0)$, kde platí $x_0 + y_0 = 1 \mp \frac{2X_0}{r}$.
Protože $y_0 = ax_0$ pro dvojperiodický bod platí $R_0 = (x_0, ax_0) = (\frac{r-2X_0}{r(1+a)}, \frac{a(r-2X_0)}{r(1+a)})$.

4.3. Stabilita dvojperiodického řešení

Jacobiho matice v dvojperiodickém bodě je

$$J_p = J\left(\frac{r-2X_0}{r(1+a)}, \frac{a(r-2X_0)}{r(1+a)}\right) = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{r-2X_0}{r(1+a)}B\right) & \frac{r-2X_0}{r(1+a)}B \\ \frac{a(r-2X_0)}{r(1+a)}B & \left(1 + \frac{a(r-2X_0)}{r(1+a)}B\right) \end{bmatrix},$$

kde $B = (-r)(1 + \mathrm{e}^{\pm 2X_0} + (r \mp 2X_0)\mathrm{e}^{\pm 2X_0})$.
Vlastní čísla splňují rovnici

$$\lambda^2 - \left(2 + \frac{r-2X_0}{r(1+a)}B\right)\lambda + \left(1 + \frac{r-2X_0}{r(1+a)}B\right) = 0.$$

Pro vlastní čísla platí

$$\lambda_1 = 1 \qquad \text{a} \qquad \lambda_2 = \frac{r-2X_0}{r(1+a)}B < -4.$$

Dvojperiodické řešení pro $r = s$ je nestabilní.