Modelování dynamických systémů

Matematické modelování dynamických systémů se využívá v různých oborech přírodních, technických, ekonomických a sociálních věd. Použití matematického modelu umožňuje

- popsat lépe chování systému
- zjistit chování v delším časovém úseku – proces, který probíhá ve skutečnosti pozvolna, můžeme sledovat v delším časovém horizontu
- výpočet různých variant řešení
- na rozdíl od experimentu lépe odhalit chybné poznání reality.

Dynamický systém je reálný systém, jehož stav závisí na čase, tj. stav systému se mění v čase. Naším cílem je popsat matematickými prostředky tento vývoj systému, tj. získat matematický model systému. Reálný systém není možno vždy přesně popsat matematickým modelem. Musíme zjistit nejdůležitější prvky a vlastnosti zkoumaného systému a ty budou vytvářený model popisovat. Ostatní prvky a vlastnosti můžeme zjednodušit nebo úplně vyloučit. Matematický model většinou popisuje systém pomocí množiny proměnných a konstant a pomocí množiny rovnic. Rovnice jsou většinou

- diferenční – popisují diskrétní dynamický systém
- diferenciální – popisují spojitý dynamický systém
- algebro-diferenciální – spojitý dynamický systém je popsán diferenciálními a algebraickými rovnicemi.

1. Jednoduché modely

Při matematickém modelování můžeme využít již známé jednoduché modely.

1.1. Růstové modely

Uvedeme zde modely popisující růst populace v závislosti na čase. Populací rozumíme například společenstvo živých organismů, souhrn atomů radioaktivní látky, kapitálové zásoby podniku a podobně. Symbolem $x(t)$ označme velikost populace v čase t, $b(t, x)$ určuje rychlost přírůstku dané populace velikosti x v čase t a $d(t, x)$ určuje rychlost vymírání dané populace v čase t v závislosti na velikosti populace x. Je-li rychlost růstu populace dána derivací $x'(t)$, můžeme ho popsat rovnicí

$$x'(t) \;=\; g(t, x(t))\, x(t)\,, \tag{1}$$

kde $g(t, x) = b(t, x) - d(t, x)$ je tzv. specifická míra růstu populace, která obecně může záviset na několika parametrech.

1.2. Model růstu populace živých organismů

Malthusův model:

$$x'(t) \;=\; a\, x(t)$$

Model nepředpokládá závislost specifické míry růstu na velikosti populace. Tento model je dostatečným v kratším časovém úseku a při malé populaci. Při větší populaci tento model nevyhovuje, protože populace roste s rostoucím časem neomezeně a to není reálné.

Logistická (Verhulstova) rovnice:

$$x'(t) \;=\; (a - b\, x(t))\, x(t)$$

Model zohledňuje vnitrodruhovou konkurenci. Vnitrodruhová konkurence roste při větším počtu soupeřících jedinců. Je tedy vhodné předpokládat specifickou míru růstu jako klesající funkci velikosti populace. Jednoduchou funkcí splňující tato kritéria je lineární funkce $g(x) = a - b\, x$, kde a je koeficient růstu a $b > 0$ je koeficient vnitrodruhové konkurence.

Model růstu biomasy rybí populace:

$$x'(t) \;=\; k\,(S(0) - m\,x(t))\,x(t),$$

kde $x(t)$ značí hmotnost biomasy rybí populace v čase t. Předpokládejme, že se ryby živí planktonem. Nechť $S(t)$ značí hmotnost dostupného planktonu, který zbývá v čase t. Čím více je dostupného planktonu, tím větší je specifická míra růstu biomasy. Nejjednodušší předpoklad je $g(t,x) = k\,S(t)$, kde $k > 0$ je konstanta. Je-li m počet jednotek planktonu, můžeme předpokládat

$$S'(t) \;=\; -m\,x'(t).$$

Potom dostáváme

$$S(t) \;=\; S(0) - m\,x(t).$$

Gompertzova křivka:

$$x'(t) \;=\; -a\,\ln\frac{x(t)}{K}\,x(t),$$

kde a, K jsou kladné parametry. Volíme zde $g(x) = -a\,\ln\frac{x}{K}$. Pokud se x limitně blíží k nule zprava je hodnota této funkce nekonečno. To můžeme interpretovat takto: Pokud je populace natolik malá, že jí hrozí vyhynutí, začne se bránit zvýšeným množením. Tato vlastnost se využívá například při modelování růstu rakovinného nádoru.

1.3. Model radioaktivního rozpadu

Populací v tomto modelu jsou radioaktivní atomy v nějakém izotopu chemického prvku. Velikostí této populace je aktuální počet těchto atomů v čase t. Předpokládáme nezvyšování hmoty zkoumaného chemického prvku. V rámci zažitých konvencí budeme značit počet atomů N. Dále $\lambda > 0$ značí rozpadovou konstantu prvku. Pro výše zavedené značení tedy máme $b(t,x) = 0$, $d(t,x) = \lambda$, $x(t) = N(t)$. Dosazením do rovnice (1) dostáváme:

$$N'(t) \;=\; -\lambda\,N(t)\,.$$

1.4. Model regulace glykémie inzulínem

Glykémie je koncentrace neboli hladina glukózy v krvi nebo v krevním séru. Lidské tělo je uzpůsobeno tak, aby glykémii udržovalo v poměrně stálém rozmezí cca 4-6 mmol/l. Nejdůležitějším a nejpotřebnějším hormonem pro správnou hladinu glykémie je inzulín, který jako jediný glykémii snižuje. Glukóza se ukládá do jater, odkud je postupně uvolňována do krve. Odtud se dále dostává do tkáně, kde je spotřebována. Vylučování inzulínu ze slinivky břišní je stimulováno glykémií a vyloučený inzulín postupně z organismu zmizí. Označme $G(t)$ glykémii v čase t a $I(t)$ koncentraci inzulínu v krvi v čase t. A dále předpokládejme:

1. Rychlost uvolňování glukózy do krve je konstantní. Tuto rychlost označme α.

2. Množství glukózy, které vstoupí do tkáně za jednotku času, je přímo úměrné koncentraci inzulínu v krvi. Tuto konstantu úměrnosti označme β.

3. Množství inzulínu vyloučeného ze slinivky do krve za časovou jednotku je přímo úměrné okamžité glykémii. Tuto konstantu označme γ.

4. Rychlost rozkládání inzulínu je přímo úměrná jeho koncentraci. Tuto konstantu označme δ.

Na základě těchto předpokladů můžeme vytvořit následující matematický model obsahující dvě diferenciální rovnice.

$$
\begin{aligned}
G'(t) &= \alpha - \beta\, I(t) \\
I'(t) &= \gamma\, G(t) - \delta\, I(t)\,.
\end{aligned}
$$

1.5. Model sklizně

Příkladem sklízení populace mohou být rybí farma, louka s trávou atd. Popišme si tento model nejprve slovně: změna populace = noví jedinci – zemřelí jedinci – zemřelí jedinci nedostatkem prostoru – sklizení jedinci.

Předpokládejme dále, že velikost sklizně je konstantní. Použitím logistické rovnice pro předchozí popis dostaneme tuto diferenciální rovnici popisující modelovaný systém:

$$x'(t) \;=\; r\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)x(t) \;-\; h$$

kde r je reprodukční růst populace, K je horní limita velikosti populace a h je konstantní míra sklízení (celkový počet sebraných jedinců nebo zemřelých kvůli sklízení za jednotku času) a je nezávislá na velikosti populace.

2. Postup matematického modelování

Nejčastěji se používají dva způsoby modelování dynamických systémů:

- klasický postup s jednou hypotézou
- postup s alternativními hypotézami.

2.1. Klasický postup

Klasický postup můžeme rozdělit do čtyř fází:

- formulace modelu
- ověření modelu
- úprava modelu
- analýza a výpočet modelu.

Jednotlivé fáze si popíšeme:

1. **Formulace modelu**

   Cíle: na začátku procesu určíme cíle a smysl modelu.

   Hypotéza: dalším úkolem je převést cíle a současné znalosti problému do seznamu specifických hypotéz.

   Matematická formulace: kvalitativní hypotézy musí být převedeny do konkrétních kvantitativních vztahů, které mohou být formulovány matematickými rovnicemi.

2. **Ověření modelu**

   Výpočet: výpočet matematického modelu. To můžeme provést

   - analyticky, řešení spočívá v nalezení přesného řešení pomocí analytických matematických metod
   - numericky (přibližně), je třeba převést matematické rovnice do vhodného počítačového kódu. Při numerickém řešení musíme uvažovat jeho numerickou stabilitu, konvergenci a chybu, která nám vznikne
   - kvalitativní vyšetření matematického modelu; nezískáme přímo řešení, ale pouze kvalitativni vlastnosti řešení většinou v závislosti na parametrech.

   Stanovení parametrů: stanovení parametrů tak, aby model co nejlépe odpovídal naměřeným datům původního problému (shoda s experimentem).

3. **Úprava modelu** podle stanovených parametrů.

4. **Analýza a výpočet modelu.** Jakmile je model upraven, můžeme ho použít k získání odpovědi, zda byly cíle splněny. Jestliže cíle nebyly splněny, vracíme se znovu k hypotéze nebo k formulaci modelu. Jestliže cíle byly splněny, získali jsme matematický model popisující náš dynamický systém.

2.2. Postup s alternativními hypotézami

Tento postup používá více alternativních hypotéz a při ověřování postupně vylučuje nevhodné hyhotézy.