

6 Podobnost systémů a dějů

Hlavní cíle kapitoly: Transformace rozměrových veličin a rovnic na bezrozměrové veličiny a rovnice. Rozměrová analýza pomocí vlastní soustavy rozměrů. Teorie podobnosti uplatňující konstanty, invarianty nebo kritéria podobnosti. Podobnost geometrická a fyzikální. Modelové zákony a modelování. Odvození kritérií podobnosti pomocí teorie podobnosti a získání kritériálních rovnic. Princip teorie analogie.

Požadované znalosti: Pojmy fyzikální veličina, fyzikální rovnice, jednotka a číselná hodnota fyzikální veličiny. Nejběžnější systémy základních fyzikálních veličin, jejich jednotek a rozměrů. Soustava SI a vzájemné převody jednotek při užití různých soustav.

6.1 Fyzikální rovnice rozměrové a bezrozměrové

Rozměrové fyzikální rovnice obsahují rozměrové fyzikální veličiny, *) např. hmotnost, sílu, rychlost, viskozitu. Transformací rozměrových veličin na bezrozměrové dostáváme z rozměrových rovnic bezrozměrové rovnice. Jak si ukážeme, zmenší se počet proměnných přechodem od rozměrových k bezrozměrovým. Z toho důvodu jsou bezrozměrové rovnice jednodušší, což přináší značné praktické výhody.

S bezrozměrovými veličinami a rovnicemi se v chemickém inženýrství setkáváme velmi často (viz např. kapitoly 5,8,10,11,13,16,17). Proto doporučujeme studovat tyto partie ve světle kapitoly 6. Tím se získá velké množství praktických příkladů uplatnění kapitoly 6, což přispěje k jejímu pochopení.

6.1.1 Rozměrové fyzikální rovnice

Rozměrové fyzikální rovnice popisují *kvantitativní souvislosti mezi fyzikálními veličinami*. Popisují tak určitý fyzikální stav systému nebo konkrétní fyzikální děj. Fyzikální rovnice jsou *rozměrově homogenní*, tj. rozměr levé i pravé strany rovnice, jakož i každého aditivního členu, je tentýž.

Rozměrovou fyzikální rovnici s rozměrovými veličinami x_i můžeme formálně zapsat jako funkci

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (6-1)$$

obsahující množinu proměnných

$$x_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (6-2)$$

*) Zde odkazujeme na přílohu A2 a na ČSN [19] *Veličiny a jednotky ve vědě a technické praxi*.

Rozměrovou fyzikální rovnici nebo soustavu takových rovnic získáme jako výsledek teoretického modelování, bývá to obyčejná nebo parciální diferenciální rovnice nebo soustava takových rovnic a navíc příslušné okrajové a počáteční podmínky. Rovnice (6-1) formálně představuje úplnou soustavu takových vztahů.

Integrace diferenciálních rovnic, resp. soustavy diferenciálních rovnic poskytne integrální čili výpočtový vztah, který formálně zapíšeme:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (6-3)$$

V jednodušších případech odvodíme konkrétní formu výpočtového vztahu (6-3) přímo, tj. nikoliv prostřednictvím diferenciálních rovnic. Výpočtový vztah (6-3) lze též získat experimentálně proměřením a vyhodnocením souvislostí mezi veličinami x_i . Integraci lze tedy nahradit měřením.

V některých případech, kdy nejsme schopni sestavit teoretický model, je tvar funkce f v rov.(6-1) neznámý. Rozbor konkrétního problému nám potom poskytne pouze množinu významných proměnných (6-2). V tomto případě jsme schopni získat konkrétně tvar funkce F v rov.(6-3) pouze empiricky, tj. vyhodnocením naměřených dat.

6.1.2 Bezrozměrové fyzikální rovnice

Náhrada rozměrových proměnných bezrozměrovými vede ke snížení počtu proměnných, což zjednodušuje řešení (integraci) fyzikálních rovnic nebo experimentální stanovení vztahu mezi fyzikálními veličinami.

Bezrozměrové fyzikální rovnice popisují kvantitativní souvislost mezi bezrozměrovými fyzikálními veličinami, které obecně označíme π_k . Bezrozměrová veličina

$$\pi_k, k = 1, 2, \dots, r$$

má rozměr rovný jedné, tj.

$$[\pi_k] = 1$$

Bezrozměrovou fyzikální rovnici nebo soustavu rovnic získáme z rozměrové rovnice (6-1) vhodnou transformací rozměrových fyzikálních veličin x_i na bezrozměrové veličiny π_k , jak je ukázáno dále.

Formálně tuto rovnici nebo soustavu rovnic zapíšeme jako funkci

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r) = 0 \quad (6-4)$$

s množinou proměnných

$$\pi_k, k = 1, 2, \dots, r \quad (6-5)$$

Tyto bezrozměrové veličiny π_k se v *teorii podobnosti* (viz část 6.4) nazývají *kritéria podobnosti*. S některými, jako je Reynoldsovo kritérium Re , součinitel tření λ , součinitel odporu ζ , výtokový součinitel μ a bezrozměrový poměr l/d , jsme se již setkali. S mnohými se ještě v *Chemickém inženýrství I i II* setkáme. Vyjadřování fyzikálních souvislostí pomocí bezrozměrových vztahů představuje významný racionalizační prostředek chemického inženýrství. Kritéria podobnosti mohou být buď *simplexy*, což je poměr dvou veličin téhož druhu, např. $\Gamma \equiv l/d$, nebo to mohou být *komplexy*, které jsou sestaveny z veličin různého druhu, např. $Re \equiv vd/\nu$.

Protože výchozí rozměrová fyzikální rovnice je *rozměrově homogenní*, musí mít její bezrozměrová forma takovou vlastnost, že rozměr levé a pravé strany rovnice a každého aditivního členu je roven jedné.

Důležité je, že mezi počtem n rozměrových a odpovídajících r bezrozměrových proměnných platí relace

$$r < n$$

tj. že jsme převedením rozměrové rovnice do bezrozměrového tvaru snížili počet proměnných. Tím se docílí např. toho, že rozměrová parciální diferenciální rovnice (funkce f) přejde na bezrozměrovou diferenciální rovnici (funkce ϕ), jejíž řešení (integrace) je výrazně jednodušší.

Integrální (výpočtovou) formu vztahu mezi bezrozměrovými veličinami π_k zapíšeme jako funkci

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r) = 0 \quad (6-6)$$

V některých případech nejsme schopni určit konkrétní tvar funkce integrací, ale experimentálně. Vyhodnocením pokusných dat získáme rovnici (6-6) jako empirickou rovnici.

Experimentální cesta určení tvaru funkce ϕ je nezbytná, když nemáme jako výchozí informaci diferenciální rovnice, ale pouze množinu proměnných (6-5).

Snížení počtu proměnných přechodem od rozměrových proměnných k bezrozměrovým přináší značnou úsporu pokusů. Např. máme 4 rozměrové proměnné, z nichž tři jsou nezávisle nastavitelné (nezávisle proměnné) a jedna je závisle proměnná. Při úplném faktorovém pokusu^{*)} na pěti úrovních všech tří nezávislých veličin a při dvojím provedení pokusů, tj. s jedním opakováním, je třeba $2 \cdot 5^3 = 250$ jednotlivých pokusů.

Sníží-li se počet proměnných transformací do bezrozměrové formy na 2 proměnné, z toho jedna je závisle a jedna nezávisle proměnná, postačuje pro stejně vydatnou informaci $2 \cdot 5^1 = 10$ jednotlivých pokusů.

Převedením do bezrozměrového tvaru tak v našem příkladu klesnul počet potřebných pokusů na pouhých 4 %. Tomu odpovídá značná racionalizace výzkumné činnosti (zrychlení a zlevnění výzkumu) a rovněž i jeho zpřesnění při matematickostatistickém vyhodnocování pokusných dat.

^{*)} Viz např. literaturu [32] pojednávající o plánování a matematickém zpracování pokusných výsledků.

Snížení počtu proměnných je určeno počtem vazebných podmínek, které jsou:

1. Počet základních rozměrů m , který je potřebný k vyjádření všech rozměrů veličin x_i .
2. Počet přídatných závisle proměnných $(z-1)$ veličin x_i , kde z je celkový počet závisle proměnných.^{*)}

Počet r bezrozměrových proměnných π_k tedy bude:

$$r = n - (m + z - 1) \quad (6-7)$$

Hodnota r představuje také počet stupňů volnosti při transformaci množiny veličin x_i na množinu veličin π_k .

Horní odhad hodnoty r pro $z = 1$ (zjištění počtu přídatných vazeb není vždy snadné) je nazýván v literatuře jako *Buckinghamův π - teorém*:

$$r = n - m \quad [z = 1] \quad (6-7a)$$

Přechod od funkce f k funkcím F , φ , ϕ ukazuje schéma na obr. 6.1.

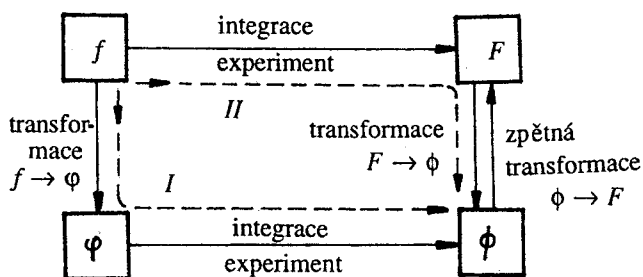
Na obr. jsou vyznačeny 2 cesty přechodu.

I. cesta:

$$f \rightarrow \varphi \rightarrow \phi \rightarrow F$$

II. cesta:

$$f \rightarrow F \leftrightarrow \phi$$



Obr.6.1. Schematické vyjádření přechodu od funkce f k funkcím φ , F , ϕ cestou I nebo II

Obě cesty jsou v odborné literatuře uplatňovány. Cesta I je však úspornější, neboť se nejprve sníží počet proměnných a potom se provádějí příslušné matematické nebo experimentální operace. Cesta II představuje např. odvození rozměrové Hagenovy-Poiseuilovy rovnice integrací diferenciální rovnice (přechod od funkce f k funkci F) a transformace do bezrozměrové formy $\lambda = 64/Re$ (přechod funkce F k funkcí ϕ) - viz přílohu A5.

Mezi funkcemi ϕ a F musí existovat možnost oboustranné transformace. Funkce ϕ (rovnice, tabulka, graf) je sice úsporná, ale pro řešení technických problémů potřebujeme znát hodnoty rozměrových proměnných, které vyplývají z funkce F .

^{*)} Z celkového počtu z závisle proměnných veličin je pro vyjádření vztahu nezbytná jedna závisle proměnná. Proto hodnota $(z-1)$ představuje přídatné závisle proměnné. Nesprávně sestavená rovnice může obsahovat více než jednu závisle proměnnou nebo máme soubor z rovnic, z nichž každá má jednu závisle proměnnou. Spojením všech rovnic dostaneme jedinou rovnici s jedinou závisle proměnnou, tj. počet přídatných závisle proměnných $(z-1)$ jsme tak eliminovali.

Výhody bezrozměrového popisu jsou tyto:

1. Počet bezrozměrových proměnných vystupujících v popisu je menší než počet rozměrových proměnných.
2. Hodnoty bezrozměrových veličin jsou *nezávislé na zvoleném systému jednotek*.
3. Z bodu 1 plyne, že *diferenciální bezrozměrová fyzikální rovnice je jednodušší*, takže její integrace nebo experimentální řešení je méně náročné.
4. Z bodu 2 plyne, že při pokusném stanovení vztahu mezi bezrozměrovými proměnnými postačuje *podstatně menší počet pokusů*. Při pokusech *postačuje měnit jen jednu rozměrovou proměnnou*, abychom docílili potřebnou změnu bezrozměrové veličiny.
5. Z bodů 1 až 4 plyne, že analytické, grafické a tabelární vyjádření výsledného vztahu mezi bezrozměrovými veličinami je jednodušší, názornější a přesnější.
6. Z bodu 5 plyne, že bezrozměrové vztahy umožňují snazší a přesnější, a tedy i *racionálnější analýzu problému*.

Nalezení definic množiny bezrozměrových veličin π_k , která je ekvivalentní množině rozměrových veličin x_i , se uskutečňuje na základě *teorie rozměrů a rozměrové homogenity fyzikálních rovnic*. Podle toho, jaká jsou výchozí data (buď množina významných proměnných, nebo systém diferenciálních rovnic) se k získání zmíněných definic používá buď *rozměrové analýzy*, nebo *teorie podobnosti*.

6.2 Rozměrová analýza

Jak již bylo řečeno, slouží rozměrová analýza k transformaci *množiny rozměrových proměnných x_i* , významně se uplatňujících při popisu stavu určitého systému nebo průběhu určitého děje, na *množinu bezrozměrových proměnných π_k* . Výchozími informacemi pro rozměrovou analýzu je pouze soupis významných proměnných a jejich rozměrů, vyjádřených pomocí základních rozměrů. Je zřejmé, že rozměrová analýza vyžaduje velmi málo informací.

Výsledkem rozměrové analýzy jsou *definice bezrozměrových veličin π_k* , a nikoliv vztah mezi těmito veličinami. Ten bývá obvykle získáván pokusnou cestou na modelovém zařízení.

Klasická rozměrová analýza vycházející z univerzální soustavy rozměrů, např. odpovídající soustavě SI, je matematicky *dosti náročná* (viz např. [33]). Zde si proto ukážeme *jednoduchou verzi* rozměrové analýzy založené na vlastní soustavě rozměrů, která je vytvořena ve shodě s řešeným problémem.

Vycházíme z toho, že základní rozměry lze vybírat vcelku libovolně. Máme-li n rozměrových veličin, které mají m základních rozměrů D_j , $j = 1, 2, \dots, m$, pak lze rozměry týchž n veličin vyjádřit pomocí jiné soustavy základních rozměrů D'_j , $j = 1, 2, \dots, m'$. Přitom počet základních rozměrů s nenulovými exponenty by měly být u obou soustav stejný, tj. $m = m'$. Podle přílohy A2 zapíšeme rozměr fyzikální veličiny x_i pomocí základních rozměrů D_j a D'_j vzorcem:

$$[x_i] = \prod_{j=1}^m D_j^{a_{ij}} = \prod_{j=1}^{m'} (D_j')^{a_{ij}} \quad [m = m'] \quad (6-8)$$

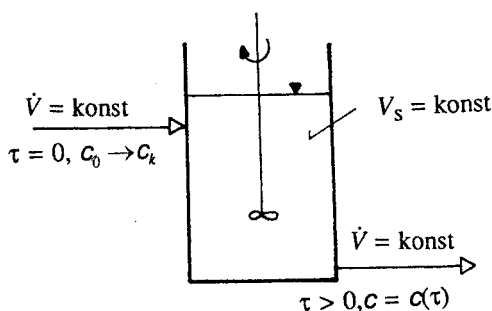
Vlastní soustavu základních rozměrů D_j' lze tedy vybrat tak, aby platilo

$$D_j' = [x_i] \quad j = 1, 2, \dots, m' \quad (6-9)$$

Protože však je rozměrových veličin $n > m'$, využijeme jen část z nich k vytvoření vlastní soustavy rozměrů. Vlastní postup a jeho výhody jsou ukázány formou příkladu.

Příklad: Neustálené míšení roztoku soli

Na obr.6.2 je vyobrazena *mechanicky míchaná průtočná soustava* tvořená nádobou s míchadlem, přívodem a odvodem kapaliny.



Obr.6.2 Průtočná mechanicky míchaná soustava

V čase $\tau < 0$ je přiváděn a odváděn vodný roztok soli o koncentraci c_0 (hmotnostní koncentrace soli) konstantním objemovým tokem $\dot{V}$. V nádobě je udržován konstantní objem roztoku V_s . Mechanické míchadlo je v provozu.

V čase $\tau = 0$ uskutečnime náhlou (skokovou) změnu koncentrace z hodnoty c_0 na c_k . Tuto koncentraci i původní hodnotu objemového toku $\dot{V}$ pak udržujeme na vstupu konstantní. Sledujeme *změny na výstupu*, kde se původní koncentrace c_0 ($\tau < 0$) pro čas $\tau > 0$ začne měnit s časem. Na výstupu pak máme $c = c(\tau)$.

Úkolem je pokusné stanovení závislosti výstupní koncentrace roztoku na čase τ pro časy $\tau \geq 0$. Zahrneme-li do této závislosti i parametry, které mohou být nezávisle nastavovány, hledáme průběh funkce (parametry jsou odděleny středníkem):

$$c = c(\tau; \dot{V}, V_s, c_0, c_k) \quad (A)$$

Experimenty by měly poskytnout konkrétní tvar integrálního vztahu

$$F(\dot{V}, V_s, c - c_k, c_0 - c_k, \tau) \quad (B)$$

v němž jsme nahradili původní koncentrace diferencemi vzhledem ke koncentraci c_k .

Náhrada původních koncentrací jejich diferencemi vede ke zjednodušení výsledných bezrozměrových veličin a vztahů, neboť rychlost děje (vyrovnávání koncentrací) je závislá na rozdílech: Rozdíl $(c_0 - c_k)$ představuje maximální rozdíl koncentrací, který může v systému nastat. Podle matematické terminologie představuje takový rozdíl normu. Rozdíl $(c - c_k)$ reprezentuje proměnnou c v transformované podobě a podíl obou diferencí $(c - c_k) / (c_0 - c_k)$ je normovaná koncentrace C , která nabývá hodnot $C \in \langle 0; 1 \rangle$.

Máme tedy rozměrové veličiny o počtu $n = 5$:

$$x_1 = \dot{V}$$

$$x_2 = V_s$$

$$x_3 = c - c_k \quad (C)$$

$$x_4 = c_0 - c_k$$

$$x_5 = \tau$$

Rozměry těchto veličin vyjádřené pomocí základních rozměrů D_j (zde užita soustava SI) jsou:

$$[\dot{V}] = L^3 T^{-1}$$

$$[V_s] = L^3$$

$$[c_0 - c_k] = [c - c_k] = M L^{-3} \quad (D)$$

$$[\tau] = T$$

Uplatněná původní soustava základních rozměrů tedy je L, M, T , tj. $m = 3$.

Vlastní soustava základních rozměrů D'_j , $m' = 3$, bude s výhodou sestavena podle rovnice (6-9), tj.:

$$D'_j = [x_j], \quad j = 1, 2, 3 \quad (E)$$

Volba veličin x_j k vyjádření D'_j je omezena požadavkem, aby vlastní soustava rozměrů zahrnovala všechny původní základní rozměry D_j , tj. L, M, T . Za rozměry D'_j volíme např.:

$$D'_1 = [V_s]$$

$$D'_2 = [c_0 - c_k] \quad (F)$$

$$D'_3 = [\tau]$$

Kombinací rovnic (C) a (F) a úpravou dostaneme vyjádření původních rozměrů D_j pomocí vlastní soustavy D_j' :

$$L^3 = [V_s] \Rightarrow L = [V_s]^{1/3}$$

$$M L^{-3} = [c_0 - c_k] \Rightarrow M = L^3 [c_0 - c_k] = [V_s] [c_0 - c_k] \quad (G)$$

$$T = [\tau]$$

Takto vyjádřené rozměry D_j eliminujeme ze zbývajících dvou rovnic soustavy (D):

$$[\dot{V}] = [V_s] [\tau]^{-1}$$

$$[c - c_k] = [V_s] [c_0 - c_k] [V_s]^{-1} \quad (H)$$

Soustavu (H) převedeme do bezrozměrové formy např. dělením levé strany pravou stranou:

$$\frac{[\dot{V}] [\tau]}{[V_s]} = 1 = [\pi_1]$$

$$\frac{[c - c_k]}{[c_0 - c_k]} = 1 = [\pi_2] \quad (I)$$

Definice bezrozměrových proměnných potom jsou:

$$\pi_1 = \frac{\dot{V} \tau}{V_s} = \frac{\tau}{\bar{\tau}} = \Theta$$

$$\pi_2 = \frac{c - c_k}{c_0 - c_k} = C \quad (J)$$

Střední dobu prodlení $\bar{\tau}$ jsme zavedli podle rovnice (I-1) za předpokladu, že roztok v objemu V_s a v objemovém toku $\dot{V}$ uvažujeme při stejné hustotě, tj. $\dot{V} / V_s = \dot{m} / m_s$. Veličinu π_1 nazveme potom *bezrozměrový čas* Θ a veličinu π_2 *bezrozměrová (normovaná) koncentrace* C .

Dostali jsme 2 bezrozměrové veličiny, což vyhovuje Buckinghamově teorému podle rov.(6-7a):

$$r = n - m = 5 - 3 = 2$$

Odvozené bezrozměrové veličiny použijeme k pokusnému určení závislosti

$$\Phi(\pi_1, \pi_2) = 0$$

$$C = C(\Theta)$$

6.3 Teorie podobnosti

Teorie podobnosti umožňuje posoudit, zda jsou dva systémy nebo děje téže fyzikální podstaty podobné.*)

Teorie podobnosti současně dává návod, jak vytvořit k danému systému nebo ději, který se označuje jako *vzor*, podobný systém nebo děj, který se nazývá *model*. Matematicko-fyzikální souvislost mezi vzorem a modelem umožňuje uplatnit postup pro racionální řešení technických problémů, který se nazývá modelování (viz část 6.4).

Pomocí teorie podobnosti můžeme *transformovat množinu rozměrových proměnných na množinu se sníženým počtem bezrozměrových proměnných*, pokud jsou k dispozici vztahy popisující daný systém či děj ve formě diferenciálních rovnic včetně počátečních a okrajových podmínek. Se snižováním počtu rozměrových proměnných jejich transformací do bezrozměrové formy jsme se již setkali v části 6.1. Zde však bylo k této transformaci užito rozměrové analýzy, která vychází z jiných primárních informací než teorie podobnosti.

Snížený počet bezrozměrových proměnných dává možnost *zobecňovat* výsledky experimentů a zobecněné výsledky potom uplatnit při *navrhování průmyslových zařízení*. Při práci na počítači zkracuje dobu výpočtu a zlepšuje konvergenci řešení.

6.3.1 Vyjádření podobnosti systémů a dějů

Zde ukážeme vyjádření podobnosti systémů a dějů třemi různými způsoby, a to pomocí

- a) konstant podobnosti,
- b) invariantů podobnosti,
- c) kritérií podobnosti.

Pojmy konstanta a invariant podobnosti vyložíme na nejjednodušším případě podobnosti systémů, kterým je *podobnost geometrická*. V případě geometrické podobnosti se posuzují vzájemné relace dvou systémů pouze z hlediska jejich tvaru, který je vyjádřen nejdůležitějšími délkami, tzv. *charakteristickými délkami systému*. Např. u nádoby se souose umístěným míchadlem naplněné kapalnou vsádkou (viz kap. 12 *Míchání* a kap.8 *Příkladů*) jsou za významné lineární délky považovány průměr míchadla d , průměr nádoby D ,

*) S pojmem *podobný systém* jsme se již setkali na střední škole při popisu podobnosti trojúhelníků.

výška hladiny vsádky nade dnem nádoby H , výška roviny míchadla nade dnem h_2 a šířka narážky b .

Vedle podobnosti geometrické budeme pojednávat o *fyzikální podobnosti*, která vyjadřuje podobnost systémů a dějů z hlediska jiných, intenzivních fyzikálních veličin (např. hustota ρ , viskozita η , teplota t , tlak p , rychlost v), než jsou veličiny sloužící k vyjádření geometrie systému (charakteristické délky). K vyjadřování fyzikální podobnosti obvykle uplatňujeme *kritéria podobnosti*.

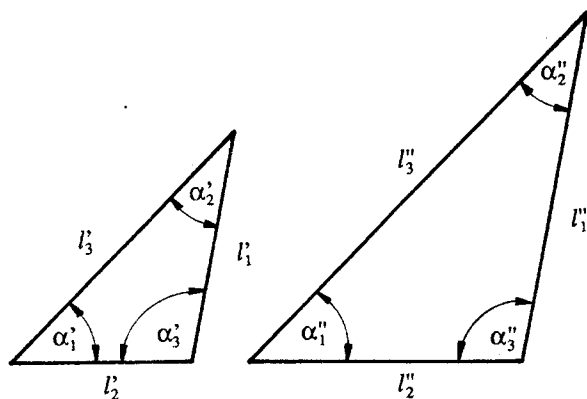
6.3.1.1 Konstanty podobnosti

Uvažujeme dva obecné různě velké trojúhelníky zobrazené na obr.6.3. K porovnání většího a menšího trojúhelníku použijeme poměr odpovídajících si délek, tj.

$$l_1'' / l_1' = c_{l1} \quad l_2'' / l_2' = c_{l2} \quad l_3'' / l_3' = c_{l3}$$

Pro *podobné trojúhelníky* musí platit:

$$\frac{l_1''}{l_1'} = \frac{l_2''}{l_2'} = \frac{l_3''}{l_3'} = c_{l1} = c_{l2} = c_{l3} = c_l \quad (6-10)$$



Obr.6.3. Dva podobné obecné trojúhelníky s délkami stran l_1, l_2, l_3 a s úhly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rozlišené jednou čarou (') pro menší a dvěma (') pro větší trojúhelník

tj. poměr délek odpovídajících si stran musí být konstantní. *Konstanta podobnosti délek* c_l se též nazývá konstantou zvětšení systému (') vůči systému (').

Je zřejmé, že konstanty podobnosti jsou bezrozměrové veličiny, neboť představují poměr dvou veličin téhož druhu.

Geometrickou podobnost trojúhelníků (a obdobně i jiných geometrických útvarů) lze též vyjádřit pomocí charakteristických úhlů:

$$\alpha_1'' / \alpha_1' = \alpha_2'' / \alpha_2' = \alpha_3'' / \alpha_3' = 1 \quad (6-11)$$

V technické praxi však dáváme přednost užití délek (snáze a přesněji se měří) před úhly.

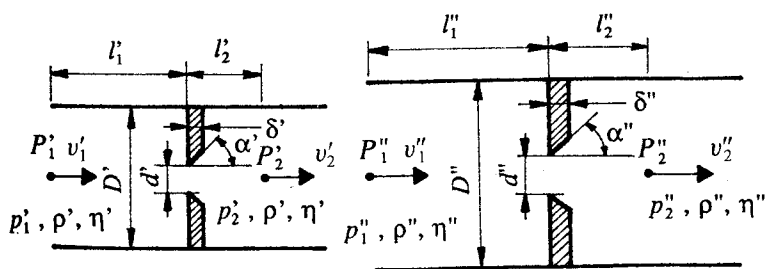
Při vyjadřování nebo posuzování *geometrické podobnosti složitějších soustav* pomocí konstant podobnosti délek postupujeme v principu stejně jako v ukázaném případě podobných trojúhelníků.

Nyní *rozšíříme tuto metodu* posouzení podobnosti dvou systémů a dějů téže fyzikální povahy i na *další fyzikální veličiny*. Obecně platí, že podobné jsou dva objekty (systémy a děje v nich probíhající), když současně vykazují

- podobnost geometrickou,
- podobnost fyzikální, tj. když jsou podobná pole jejich fyzikálních veličin.^{*)}

Podobnost *fyzikálních dějů* lze vyjádřit takto: Děje téže fyzikální povahy v geometricky podobných soustavách vykazují fyzikální podobnost tehdy, když významné fyzikální veličiny^{**)} jsou si úměrné v odpovídajících místech obou soustav a v odpovídajících časech.

Ilustrujme fyzikální podobnost jednoduchým příkladem ukázaným na obr.6.4. Zde uvažujeme *ustálený tok tekutiny trubkou*, v níž se nachází zabudovaná clona. Úsek trubky s clonou představuje jednak menší systém ('), jednak větší systém (").



Obr.6.4. Proudění tekutiny trubkou se zabudovanou clonou - příklad na fyzikální podobnost

Geometrická podobnost clony s otvorem d a úkosem α zabudované do trubky o průměru D je splněna, když platí

$$\frac{D''}{D'} = \frac{d''}{d'} = c_l \quad \frac{\alpha''}{\alpha'} = 1 \quad (6-12)$$

^{*)} Pod pojmem *pole fyzikální veličiny* je míněno rozložení této veličiny (intenzivní) v prostoru a čase (v hranicích daného systému).

^{**)} Za *významné veličiny* se považují ty, jejichž změna způsobí výraznou změnu závisle proměnné a naopak za *nevýznamné* považujeme ty veličiny, které mají na závisle proměnnou zanedbatelný vliv. Významnost veličiny lze testovat statistickými metodami. Zanedbáním málo významných veličin docílíme zjednodušení s přijatelnou chybou. Dostaneme *model - zjednodušený obraz skutečnosti*.

Fyzikální podobnost tlakového a rychlostního pole obou systémů ilustrujeme pouze pomocí hodnot těchto veličin ve dvou vybraných bodech P_1 a P_2 , které musí u obou systémů ležet v odpovídajících si místech podle principu geometrické podobnosti. Oba body jsme položili do osy trubky. Proto k určení jejich polohy postačují délky l_1 a l_2 (viz obr.6.4). *Vzájemná poloha obou bodů u podobných soustav* je dána stejnou hodnotou konstanty podobnosti délek c_l jako v rov.(6-12):

$$\frac{l_1''}{l_1'} = \frac{l_2''}{l_2'} = c_l \quad (6-13)$$

Jelikož se tento ilustrativní příklad týká ustáleného děje, nemusíme určit odpovídající si časy (důležité pouze pro neustálené děje), protože hodnoty fyzikálních veličin ve zvolených bodech jsou nezávislé na čase.

Pro *fyzikálně podobné systémy* musí platit:

$$\frac{v_1''}{v_1'} = \frac{v_2''}{v_2'} = c_v$$

$$\frac{p_1''}{p_1'} = \frac{p_2''}{p_2'} = c_p \quad (6-14)$$

$$\frac{\rho''}{\rho'} = c_\rho \quad \frac{\eta''}{\eta'} = c_\eta \quad , \dots$$

Z ilustrativního příkladu, kde jsme mohli vybrat libovolné dva body P_1 a P_2 , plyne důležitý obecný závěr: *Fyzikální veličina jednoho druhu má v podobných systémech jedinou hodnotu konstanty podobnosti.*

Obecně platí, že dva systémy jsou *podobné*, jestliže pro všechny významné fyzikální veličiny (včetně geometrických parametrů) jsou současně splněny relace:

$$x_i'' / x_i' = c_{xi} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6-15)$$

Veličiny x_i'' a x_i' v rov.(6-15) jsou téhož druhu a jsou přiřazeny odpovídajícím si místům (z hlediska geometrické podobnosti) srovnávaných systémů (viz např. poměr v_1'' / v_1' podle obr.6.4).

Relace (6-15) představuje *nutnou a dostačující podmínku podobnosti systémů a dějů*. Tato relace musí platit u podobných objektů v odpovídajících si místech a časech včetně okrajů a počátečních stavů obou soustav.

K jednomu vzoru lze pomocí proměnné hodnoty c_l (geometrická podobnost) a na základě různých c_{xi} pro ostatní fyzikální veličiny vytvořit nekonečný počet modelů. Kombinace hodnot c_{xi} však není zcela nezávislá, jak ukážeme v části 6.4.

6.3.1.2 Invarianty podobnosti

Použití invariantů podobnosti opět ukážeme na podobnosti trojúhelníků z obr.6.3. V daném trojúhelníku zvolíme jednu z charakteristických délek za míru všech charakteristických délek tohoto trojúhelníka. Tuto míru označíme l' . Zvolíme-li u prvního trojúhelníka za míru délku strany l'_1 , pak významově tutéž stranu zvolíme za míru délek u trojúhelníka druhého. Bude tedy:

$$(l')' = l'_1, (l')'' = l''_1 \quad (6-16)$$

Vydělíme-li nyní jednotlivé charakteristické délky zvolenou mírou, dostaneme relativní délky (bezrozměrové délky), které nás informují o tom, jakým násobkem zvolené míry je daná charakteristická délka. Tyto bezrozměrové délky označíme l'_1, l'_2, l'_3 . Při uplatnění míry délek podle rov. (6-12) bude:

$$\begin{aligned} (l'_1)' &= \frac{l'_1}{(l')'} = 1, (l'_2)' = \frac{l'_2}{(l')'}, (l'_3)' = \frac{l'_3}{(l')'} \\ (l'_1)'' &= \frac{l''_1}{(l')''} = 1, (l'_2)'' = \frac{l''_2}{(l')''}, (l'_3)'' = \frac{l''_3}{(l')''} \end{aligned} \quad (6-17)$$

Pro geometricky podobné trojúhelníky musí platit:

$$(l'_2)' = (l'_2)'' = l'_2, (l'_3)' = (l'_3)'' = l'_3 \quad (6-18)$$

přičemž současně platí:

$$(l'_1)' = (l'_1)'' = l'_1 = 1 \quad (6-18a)$$

Bezrozměrové délky l'_1, l'_2, l'_3 nazýváme invarianty podobnosti délek l_1, l_2, l_3 při posuzování podobnosti trojúhelníků. Snadno lze prokázat, že vyjádření podobnosti pomocí konstant podobnosti je ekvivalentní aplikaci invariantů podobnosti.

Obdobné relace bychom dostali při vyjádření podmínky geometrické podobnosti složitějších geometrických soustav.

Pomocí invariantů podobnosti lze rovněž vyjádřit *fyzikální podobnost*. Stejně jako jsme zavedli pro každý systém odpovídající si vybrané délky jako míru délek, musíme tak učinit pro každou fyzikální veličinu. Pro veličiny p, v, ρ, η vyskytující se v obr.6.4 zavedeme míry p^+, v^+, ρ^+, η^+ zvlášť pro systém (') a zvlášť pro systém ("). Přitom za míru (relativní jednotku) určité veličiny je nutno volit její charakteristickou hodnotu, která je jednoznačně definována. Např. pro rychlost v můžeme za míru zvolit střední rychlost v v průtočném průřezu, tj.

$$v^+ = \langle v \rangle = \dot{V} / S \quad (6-19)$$

nebo hodnotu rychlosti v ose potrubí

$$v^* = v_{\max} \quad (6-20)$$

S použitím charakteristické rychlosti podle rov.(6-19) jsme se již setkali, např. v kap.5 *Proudění tekutiny potrubím* u definice Reynoldsova kritéria Re a součinitele tření λ . Jako míry tlaků můžeme při proudění tekutiny trubkou např. použít tlakovou ztrátu Δp_{dis} na úseku délky l , tj.

$$p^* = \Delta p_{\text{dis}} \quad (6-21)$$

což v systému (') bude tlaková ztráta na délce l' a u systému (") tlaková ztráta na délce l'' . Přitom musí platit^{*)} $l''/l' = c_l$.

Pro veličiny, které jsou v celém systému konstantní, je volba míry formální záležitostí. V ilustrativním případě mají tuto vlastnost hustota ρ a viskozita η . Volíme

$$\rho^* = \rho, \quad \eta^* = \eta \quad (6-22)$$

Invarianty podobnosti těchto konstant se potom rovnají jedné.

S použitím invariantů podobnosti se setkáváme v části 6.3.2, která pojednává o využití teorie podobnosti k odvození kritérií podobnosti.

6.3.1.3 Kritéria podobnosti

V části 6.1 jsme se setkali s transformací množiny rozměrových proměnných x_i , $i=1, 2, \dots, n$ na množinu bezrozměrových proměnných π_k , $k=1, 2, \dots, r$. Tyto bezrozměrové proměnné nazýváme *kritéria podobnosti*, neboť nutnou a dostačující podmínkou podobnosti systémů a dějů je, že pro všechna kritéria podobnosti u porovnávaných objektů platí

$$\pi'_k = \pi''_k, \quad k=1, 2, \dots, r \quad (6-23)$$

tj. musí současně platit

$$\pi'_1 = \pi''_1, \quad \pi'_2 = \pi''_2, \quad \dots, \quad \pi'_r = \pi''_r \quad (6-23a)$$

Již jsme ukázali odvození kritérií π_k z rozměrových veličin x_i pomocí rozměrové analýzy (odd.6.2). V části 6.3.2 ukážeme odvození kritérií podobnosti pomocí teorie podobnosti.

Někdy se tato kritéria rozdělují na *simplexy*, což jsou bezrozměrové veličiny dané poměrem dvou veličin téhož druhu (např. relativní drsnost ϵ/d), a na *komplexy*, což jsou bezrozměrové veličiny definované pomocí veličin různého druhu (např. Reynoldsovo kritérium Re nebo součinitel tření λ).

^{*)} Jednu z délek l'' a l' lze vybrat libovolně.

Na základě vztahů (6-15) a (6-23) lze ukázat souvislost mezi vyjádřením podobnosti pomocí kritérií a pomocí konstant podobnosti, a tím i pomocí invariantů podobnosti. K posouzení a k vyjádření podobnosti můžeme tedy užít vzájemně ekvivalentní konstanty, invarianty a kritéria podobnosti.

6.3.2 Odvození kritérií podobnosti pomocí teorie podobnosti

Teorie podobnosti umožňuje převedení množiny n rozměrových proměnných x_i , které se uplatňují při popisu daného systému nebo děje, na odpovídající množinu r bezrozměrových proměnných π_k .

Totéž umožňuje rozměrová analýza, pro kterou je výchozí informací množina rozměrových proměnných x_i a jejich rozměrů $[x_i]$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Znalost vztahů mezi veličinami x_i přitom není požadována.

Výchozími informacemi pro *teorii podobnosti* však je vztah (nebo vztahy) mezi rozměrovými fyzikálními veličinami

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (6-1)$$

vyjádřený analyticky, zpravidla ve formě *diferenciální rovnice* nebo *soustavy diferenciálních rovnic* včetně okrajových a počátečních podmínek.

Pro další matematické zpracování je výhodné rovnice transformovat na jednodušší, bezrozměrový tvar, tj. na funkci ϕ z rov. (6-4). Ten se snáze integruje analyticky či numericky. Získá se funkce ϕ z rov. (6-6), která platí pro všechny podobné systémy. Transformační postup v dalším vyložíme.

Neumíme-li výchozí rovnice analyticky či numericky řešit, tj. nalézt jejich integrální vyjádření (výpočtový vztah)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (6-3)$$

uplatníme dále uvedenou metodu transformace. Pokusnou cestou pak určíme vztah mezi bezrozměrovými proměnnými z množiny π_k , $k = 1, 2, \dots, r$:

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r) = 0 \quad (6-6)$$

Získaná *empirická funkce* ϕ má charakter integrálního tj. výpočtového vztahu vzhledem k funkci f po převedení do bezrozměrového tvaru a platí pro všechny podobné soustavy - viz rov. (6-23). Jde tedy o integrál funkce ϕ . Často se uplatňuje empirické vyjádření funkce ϕ v mocninovém tvaru:

$$\pi_1 = A \pi_2^a \pi_3^b \dots \pi_r^z \quad (6-24)$$

kde $A, a, b, \dots, z$ jsou konstanty. Funkce ϕ daná rov. (6-6) nebo její vyjádření např. v mocninovém tvaru rovnice (6-24) se nazývá *kriteriální rovnice*. Rovnice získaná pokusnou cestou má platnost zaručenou jen v rozmezí hodnot kritérií vypočtených z pokusných dat.

Lze dokázat, že bezrozměrové proměnné π_k odvozené metodou teorie podobnosti z diferenciálních rozměrově homogenních rovnic včetně okrajových a počátečních podmínek (funkce f) jsou stejné jako bezrozměrové proměnné odvozené z integrálů těchto rovnic (funkce F).

Nejprve uvedeme postup *odvození kritérií metodou teorie podobnosti* a tento postup potom budeme ilustrovat na příkladech.

1. Pro každou veličinu x_i v diferenciálních rovnicích (funkce f) se zvolí odpovídající charakteristická veličina x_i^* , která má charakter míry (relativní jednotky). Poměr veličiny x_i a charakteristické veličiny x_i^* je bezrozměrová veličina x_i° , kterou jsme nazvali *invariant podobnosti*. Potom lze vyjádřit libovolnou fyzikální rozměrovou veličinu vzorcem

$$x_i = x_i^* x_i^\circ \quad (6-25)$$

Za charakteristickou rychlost, jak jsme si již uvedli, můžeme např. při proudění tekutiny trubkou volit střední rychlost nebo rychlost v ose potrubí a hodnoty rychlosti v různých místech soustavy lze měřit touto zvolenou relativní jednotkou. V jiné soustavě má ovšem taková relativní jednotka obecně jinou velikost.

2. Do soustavy rozměrových diferenciálních rovnic (funkce f) dosadíme za každou veličinu x_i ze vzorce (6-25) a takto upravené rovnice převedeme do bezrozměrového tvaru dělením vhodným výrazem, sestaveným z charakteristických veličin (viz dále uvedené příklady).
3. Jednotlivé členy bezrozměrové rovnice podle bodu 2 obsahují bezrozměrové koeficienty tvořené charakteristickými veličinami. Tyto koeficienty jsou hledaná kritéria podobnosti π_k . Kritéria jsou složena z charakteristických veličin různého druhu (*komplexy*) nebo stejného druhu (*simplexy*).
4. Takto nalezená kritéria obsahuje integrál diferenciálních rovnic získaný analyticky, numericky nebo experimentálně. Pokusně získaný vztah mezi jednotlivými kritérii π_k (funkce ϕ) může být vyjádřen kritériální rovnicí, tabelárně nebo graficky.

Dále uvedené ilustrativní příklady jsou založeny na diferenciálních rovnicích, které sice v rámci našich přednášek neodvozujeme, které však mají v chemickoingenýrské teorii základní význam.

V prvním příkladu jsou výchozími rovnicemi diferenciální rovnice kontinuity^{*)} a Navierova-Stokesova rovnice^{**)} proudění reálné tekutiny. Pro jednoduchost jsou tyto rovnice zapsány ve skalární formě jako průmět do osy x .

V druhém příkladu uplatňujeme Fourierovu-Kirchhoffovu rovnici, jejíž integrál udává rozdělení teplot v proudu tekutiny, s okrajovou podmínkou pro přestup tepla (viz kapitoly 15, 16). Opět se vychází ze skalárního zápisu pro průmět do osy x .

^{*)} Odvození pomocí diferenciální bilance celkové hmotnosti je uvedeno v příloze A6.

^{**)} Odvození Navierovy-Stokesovy rovnice je založeno na diferenciální bilanci hybnosti proudící reálné tekutiny. Navierova-Stokesova rovnice vyjadřuje souvislost mezi rychlostí tekutiny a dalšími fyzikálními veličinami v prostoru a čase. Její integraci se získá rychlostní pole tekutiny. Podrobnější informace lze najít v literatuře, např. [8, str.97].

Příklad 1: Proudění tekutiny trubkou

Uvažujeme proudění tekutiny v poli měrné objemové síly, jejíž průmět do osy x je f_x . Hustotu ρ a viskozitu η předpokládáme konstantní. Jestliže průmět rychlosti do osy x označíme v_x , můžeme zapsat diferenciální rovnici kontinuity nestlačitelné tekutiny do směru x :

$$\frac{dv_x}{dx} = 0 \quad (6-26)$$

Navierova-Stokesova rovnice pro průmět do osy x zní:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + f_x \rho = \\ = \rho \frac{\partial v_x}{\partial \tau} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \right) \end{aligned} \quad (6-27)$$

Nyní uplatníme na soustavu rovnic (6-26) a (6-27) dříve uvedený postup:

1. Všechny fyzikální veličiny vyjádříme podle vzorce (6-25):

$$\begin{aligned} x &= l^+ x^\circ \\ v_x &= v^+ v_x^\circ & y &= l^+ y^\circ \\ v_y &= v^+ v_y^\circ & z &= l^+ z^\circ \\ v_z &= v^+ v_z^\circ & f_x &= f^+ f_x^\circ \\ p &= p^+ p^\circ & \rho &= \rho^+ \rho^\circ \\ \eta &= \eta^+ \eta^\circ & \tau &= \tau^+ \tau^\circ \end{aligned} \quad (6-28)$$

2. Z rovnic (6-28) dosadíme do rovnic (6-26) a (6-27) a získané rovnice převedeme do bezrozměrového tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{v^+}{l^+} \frac{dv_x^\circ}{dx^\circ} = 0 \quad \left| : \left(\frac{v^+}{l^+} \right)^* \right. \\ 1 \frac{dv_x^\circ}{dx^\circ} = 0 \end{aligned} \quad (6-29)$$

^{*}) Celou rovnici dělíme výrazem (v^+ / l^+) .

Vzhledem k tomu, že před bezrozměrovou derivací v rovnici (6-29) je koeficient roven jedné, nevyplyvá z této rovnice žádné kritérium podobnosti, tj. všechny bezrozměrové rovnice kontinuity jsou stejné bez ohledu na podmínky. Tím je splněna podobnost pro všechny tyto případy (všechny diferenciální rovnice kontinuity jsou si podobné).

Nyní dosadíme ze vztahů (6-28) do Navierovy-Stokesovy rovnice (6-27). Obdržíme

$$\begin{aligned}
 & - \frac{p^+}{l^+} \frac{\partial p^\circ}{\partial x^\circ} + \frac{\eta^+ v^+}{l^{+2}} \eta^\circ \left[\frac{\partial^2 v_x^\circ}{\partial x^{\circ 2}} + \frac{\partial^2 v_x^\circ}{\partial y^{\circ 2}} + \frac{\partial^2 v_x^\circ}{\partial z^{\circ 2}} \right] + f^+ \rho^+ f_x^\circ \rho^\circ = \\
 & = \frac{\rho^+ v^+}{\pi^+} \rho^\circ \frac{\partial v_x^\circ}{\partial \tau^\circ} + \frac{\rho^+ v^{+2}}{l^+} \rho^\circ \left[\frac{\partial v_x^\circ}{\partial x^\circ} v_x^\circ + \frac{\partial v_x^\circ}{\partial y^\circ} v_y^\circ + \frac{\partial v_x^\circ}{\partial z^\circ} v_z^\circ \right] \left| : \left(\frac{\rho^+ v^{+2}}{l^+} \right) \right. \\
 & - \frac{p^+}{\rho^+ v^{+2}} \frac{\partial p^\circ}{\partial x^\circ} + \frac{\eta^+}{l^+ v^+ \rho^+} \eta^\circ \left[\frac{\partial^2 v_x^\circ}{\partial x^{\circ 2}} + \frac{\partial^2 v_x^\circ}{\partial y^{\circ 2}} + \frac{\partial^2 v_x^\circ}{\partial z^{\circ 2}} \right] + \frac{f^+ l^+}{v^{+2}} f_x^\circ \rho^\circ = \\
 & = \frac{l^+}{v^+ \tau^+} \rho^\circ \frac{\partial v_x^\circ}{\partial \tau^\circ} + \rho^\circ \left[\frac{\partial^2 v_x^\circ}{\partial x^{\circ 2}} + \frac{\partial^2 v_x^\circ}{\partial y^{\circ 2}} + \frac{\partial^2 v_x^\circ}{\partial z^{\circ 2}} \right] \quad (6-30)
 \end{aligned}$$

3. Koeficienty složené z charakteristických veličin označených (*) jsou bezrozměrové, neboť celá rovnice (6-30) je bezrozměrová. Tato rovnice platí pro podobné systémy, jen když koeficienty u týchž členů (kritéria podobnosti) jsou číselně stejné; viz podmínka (6-23). Nadále pro jednoduchost upouštíme od vyznačování charakteristických veličin křížkem.

Z rovnice (6-30) vyplývají tato kritéria hydrodynamické podobnosti [za charakteristický tlak se často bere tlaková ztráta, tj. $p^+ \equiv \Delta p_{\text{dis}}$ - viz rov.(6-21)]:

$$\begin{aligned}
 \pi_1 & \equiv \frac{\Delta p_{\text{dis}}}{\rho v^2} = Eu \equiv \frac{1}{2} \zeta \quad *) \\
 \pi_2 & \equiv \frac{\eta}{l v \rho} \equiv \frac{1}{Re} & Re & \equiv \frac{1}{\pi_2} = \frac{l v \rho}{\eta} \\
 \pi_3 & \equiv \frac{f l}{v} \equiv Fr \\
 \pi_4 & \equiv \frac{l}{v \tau} \equiv \frac{1}{Sl} & Sl & \equiv \frac{1}{\pi_4} = \frac{v \tau}{l}
 \end{aligned}$$

*) Po vynásobení rov.(5-18) hustotou tekutiny ρ získáme:

$$\Delta p_{\text{dis}} = \rho e_{\text{dis}} = \zeta v^2 \rho / 2 .$$

Dostaneme tak vyjádření součinitele odporu ζ pomocí tlakové ztráty Δp_{dis} .

Kritéria typu komplexů se často označují zkratkami jmen slavných vědců: *Eu* - Eulerovo kritérium, *Re* - Reynoldsovo kritérium, *Fr* - Froudovo kritérium, *Sl* - Strouhalovo kritérium. Kritérium ζ se nazývá součinitel odporu. Kromě těchto kritérií lze z okrajových podmínek (např. charakterizujících geometrii soustavy) odvodit *simplexy* (poměr dvou veličin téhož druhu). Např. v případě drsné trubky obdržíme

$$\pi_5 \equiv \frac{l}{d} \quad \pi_6 \equiv \frac{\varepsilon}{d}$$

kde π_5 představuje poměr délky trubky k průměru a π_6 relativní drsnost.

4. Pokusné stanovení funkce ϕ poskytne kritériální rovnici, např. typu

$$Eu = A Re^a Fr^b Sl^c \left(\frac{l}{d} \right)^d \left(\frac{\varepsilon}{d} \right)^e \quad (6-31)$$

Kritériální vztah typu (6-31) je v literatuře (*Příklady*) např. pro tok tekutiny v drsné trubce uváděn často v grafické formě jako *Moodyho graf* (obr.5.6)

$$\phi(\lambda, Re, \varepsilon/d) = 0 \quad (6-31a)$$

pro případ, že je děj ustálený ($Sl = \text{konst}$), že na tok nemá vliv vnější silové pole ($Fr = \text{konst}$) a že $l/d > 50$ (simplex l/d nemá vliv na hodnotu Eu). Kromě toho je oproti vztahu (6-31) zavedena nová bezrozměrová proměnná - součinitel tření λ :

$$\lambda = 2 Eu d / l \quad (6-31b)$$

Již z této ukázky plyne, že množinu původně odvozených kritérií π_k lze transformovat podle potřeby na jinou množinu π_k^* o stejném počtu prvků r vytvářením převrácených hodnot původně odvozených kritérií, jejich vzájemným násobením, odmocňováním ap. Studentům se doporučuje, aby si sami vyhledali příklady dodatečné transformace odvozených kritérií pro proudící tekutinu a též v dalších případech

Příklad 2: Sdílení tepla v proudící tekutině^{)}*

Fourierova-Kirchhoffova rovnice (viz příloha A10) při jednosměrném sdílení tepla ve směru osy x v proudící tekutině (t - teplota, a - teplotní vodivost) má tvar:

^{*)} Tento příklad souvisí s kapitolou 16 *Sdílení tepla prouděním*. Proto doporučujeme důkladnější studium tohoto příkladu až při studiu kapitoly 16.

$$a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial t}{\partial x} \quad (6-32)$$

Okrajová podmínka vyjadřuje rovnost intenzity toku tepla přestupem z jádra tekutiny na stěnu a vedením v laminární vrstvičce v blízkosti stěny, tj. pro $x \rightarrow x_w$:

$$\alpha | \langle t \rangle - t_w | = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x \rightarrow x_w} \quad (6-33)$$

Veličina α je součinitel přestupu tepla, λ - tepelná vodivost tekutiny, t_w - teplota stěny, $\langle t \rangle$ - střední teplota tekutiny.

Uplatníme nyní uvedený postup:

1. Jednotlivé veličiny vyjádříme jako součin zvolené míry a invariantu:

$$\begin{aligned} a &= a^+ a^\circ & v_x &= v^+ v_x^\circ \\ t &= t^+ t^\circ & \lambda &= \lambda^+ \lambda^\circ \\ x &= l^+ x^\circ & \alpha &= \alpha^+ \alpha^\circ \\ \tau &= \tau^+ \tau^\circ \end{aligned} \quad (6-34)$$

2. Z rovnic (6-34) dosadíme do rov. (6-32) a (6-33):

$$\begin{aligned} \frac{a^+ t^+}{l^{+2}} a^\circ \frac{\partial^2 t^\circ}{\partial x^{\circ 2}} &= \frac{t^+}{\tau^+} \frac{\partial t^\circ}{\partial \tau^\circ} + v^+ \frac{t^+}{l^+} v_x^\circ \frac{\partial t^\circ}{\partial x^\circ} \quad : \left(\frac{a^+ t^+}{l^{+2}} \right) \\ a^\circ \frac{\partial^2 t^\circ}{\partial x^{\circ 2}} &= \frac{l^{+2}}{a^+ \tau^+} \frac{\partial t^\circ}{\partial \tau^\circ} + \frac{v^+ l^+}{a^+} v_x^\circ \frac{\partial t^\circ}{\partial x^\circ} \end{aligned} \quad (6-35)$$

$$\alpha^+ t^+ \alpha^\circ | \langle t^\circ \rangle - t_w^\circ | = -\lambda^+ \frac{t^+}{l^+} \lambda^\circ \left(\frac{\partial t^\circ}{\partial x^\circ} \right)_{x^\circ \rightarrow x_w^\circ} \quad : \left(\lambda^+ \frac{t^+}{l^+} \right)$$

$$\frac{\alpha^+ l^+}{\lambda^+} \alpha^\circ | \langle t^\circ \rangle - t_w^\circ | = -\lambda^\circ \left(\frac{\partial t^\circ}{\partial x^\circ} \right)_{x^\circ \rightarrow x_w^\circ} \quad (6-36)$$

3. Z rovnic (6-35) a (6-36) plynou kritéria:

$$\text{Fourierovo kritérium:} \quad \pi_1 \equiv Fo \equiv \frac{l^2}{a \tau}$$

$$\text{Pécletovo kritérium:} \quad \pi_2 \equiv Pe \equiv \frac{v l}{a}$$

$$\text{Nusseltovo kritérium:} \quad \pi_3 \equiv Nu \equiv \frac{\alpha l}{\lambda}$$

Při popisu sdílení tepla v proudící tekutině je ovšem třeba ještě uvažovat rovnice proudění, z kterých vyplývají hydrodynamická kritéria. Tato kritéria jsme odvodili v příkladu 1. Soustava výchozích rozměrových diferenciálních rovnic popisující sdílení tepla v proudící tekutině by se tedy skládala z rovnic (6-26), (6-27), (6-32) a (6-33).

4. Experimentálně určené kritériální rovnice popisující různé konkrétní případy sdílení tepla prouděním jsou uvedeny např. v *Příkladech*. Tyto empirické kritériální rovnice platí s jistotou (jak jsme již uvedli) pouze v rozsahu pokusných hodnot kritérií a jejich tvar závisí na pokusných údajích.

6.4 Modelování

Teorie podobnosti umožňuje racionalizaci jak teoretické, tak i praktické práce při realizaci průmyslových systémů a dějů. Geometrická a fyzikální podobnost dává návod, jak přejít od pokusů v laboratorní aparatuře k průmyslovému zařízení. Laboratorní zařízení s určitými látkami a dějem lze označit za modelové zařízení s modelovými látkami a s modelovým dějem, což souhrnně nazýváme *modelem*. Vlastní procedura, pomocí níž se hledá souvislost mezi modelovým a reálným dějem, se nazývá *modelování*.

Pro podobné systémy jsme uvedli podmínku (6-23) nebo (6-23a):

$$\pi'_k = \pi''_k, \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (6-23)$$

Vyjádříme-li kritérium π_k pomocí veličin x_i , $i=1, 2, \dots, n$, dostaneme:

$$\pi'_k = \prod_{i=1}^n (x'_i)^{\alpha_{ik}} \quad \pi''_k = \prod_{i=1}^n (x''_i)^{\alpha_{ik}} \quad (6-37)$$

kde exponenty α_{ik} jsou známé a nabývají takových hodnot, že celý výraz π'_k nebo π''_k je bezrozměrový. Jako příklad nám poslouží $\pi_k \equiv Re \equiv v^1 d^1 v^{-1}$, kde výraz nazvaný Reynoldsovo kritérium je k -tou bezrozměrovou proměnnou, obsahuje 3 fyzikální rozměrové

veličiny ($x_1 = v$, $x_2 = d$, $x_3 = \nu$) a exponenty $\alpha_{1k} = 1$, $\alpha_{2k} = 1$, $\alpha_{3k} = -1$.

Pro každou veličinu x_i můžeme psát rov.(6-15):

$$x_i'' / x_i' = c_{xi} \quad (6-15)$$

Spojením rovnic (6-15) a (6-37) dostaneme

$$\pi_k'' = \pi_k' \prod_{i=1}^n c_{xi}^{\alpha_{ik}}, \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (6-38)$$

Pro podobné objekty musí současně platit rovnost všech kritérií podobnosti podle rov.(6-23). Pro případ podobnosti potom z rov.(6-38) plyne

$$\prod_{i=1}^n c_{xi}^{\alpha_{ik}} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (6-39)$$

Soustava rovnic (6-39) představuje jinou formu vyjádření podobnosti. Tyto rovnice se nazývají *modelové zákony*, neboť jsou vhodné k praktickému použití pro účely vytváření modelů a pro přenos výsledků získaných na modelu do praxe. Těchto modelových zákonů je r pro každý případ, což je *počet vazných podmínek mezi konstantami podobnosti* (o existenci těchto vazeb jsme se již zmínili v závěru části 6.3.1.1). Rozdíl $(n - r)$ představuje potom *počet stupňů volnosti*, tj. počet konstant podobnosti, jejichž hodnota může být volena (nezávisle).

Uplatnění modelových zákonů je zřejmé z dále uvedeného příkladu.

Příklad: Obtékání koule vazkou tekutinou

Úkolem je určit sílu F , kterou působí proud tekutiny o rychlosti v , hustotě ρ a kinematické viskozitě ν na upevněnou kouli o průměru d . Předpokládejme, že nemáme k dispozici žádný výpočtový vztah a že hledanou veličinu určíme modelovým experimentem.

Nejprve přiřadíme uvedené fyzikální veličiny k proměnným x_i :

$$x_1 = F, \quad x_2 = v, \quad x_3 = \rho, \quad x_4 = \nu, \quad x_5 = d, \quad \text{tj. } n = 5$$

Zapíšeme-li rozměry těchto veličin pomocí základních rozměrů soustavy SI, zjistíme, že tyto veličiny zahrnují základní rozměry L, M, T, tj. $m = 3$.

Předpokládáme jedinou závisle proměnnou ($z = 1$), a použijeme proto Buckinghamův π - teorém daný rov.(6-7a) k odhadu počtu bezrozměrových proměnných:

$$r = n - m = 5 - 3 = 2$$

Řešením rozměrovou analýzou tedy dostaneme z uvedených 5 rozměrových proměnných 2 bezrozměrové proměnné

$$\pi_1 \equiv \frac{F}{\rho v^2 d^2} \quad \pi_1 \equiv \frac{v d}{\nu} \quad (A)$$

vázané neznámým funkčním vztahem

$$\phi(\pi_1, \pi_2) = 0$$

Podle rov.(6-23a) musí pro podobné objekty platit

$$\pi_1' = \pi_1'' \quad \pi_2' = \pi_2'' \quad (B)$$

Označíme-li konstanty podobnosti

$$c_F \equiv F'' / F' \quad c_v \equiv \nu'' / \nu' \quad c_\rho \equiv \rho'' / \rho' \quad c_v \equiv \nu'' / \nu' \quad c_d \equiv d'' / d' \quad (C)$$

dostaneme podle rov.(6-39) a s ohledem na definice (A) dva modelové zákony:

$$c_F c_\rho^{-1} c_v^{-2} c_d^{-2} = 1 \quad c_v c_d c_v^{-1} = 1 \quad (D)$$

Jelikož máme 5 konstant podobnosti a 2 modelové zákony, můžeme hodnoty tří konstant podobnosti zvolit podle vlastního uvážení. Zbývající 2 konstanty potom vyjdou výpočtem z rovnic (D).

Vytvoříme potom modelový systém (*), který podrobíme experimentu a výsledky použijeme k přenosu do reálného systému (**).

Za modelovou tekutinu zvolíme stejnou tekutinu jako v reálném případě, tj. $\rho' = \rho''$ a $\nu' = \nu''$. Potom

$$c_\rho = 1 \quad c_v = 1 \quad (E)$$

Tím se zbavíme komplikací, které by mohly vzniknout při výpočtu c_ρ a c_v obtížným výběrem modelové tekutiny s vypočtenou kombinací hustoty ρ' a viskozity ν' .

Průměr modelové koule d' zvolíme desetkrát menší než průměr koule d'' v reálném případě, tj.

$$d' = 0,1 d'' \text{ , resp. } c_d = 10 \quad (F)$$

Dvě zbývající konstanty podobnosti c_v a c_F určíme výpočtem z modelových zákonů (D) při uplatnění rovnic (A) až (C) a (E), (F):

$$c_F = c_\rho c_v^2 c_d^2 = 1 c_v^2 100$$

$$c_F = 100 c_v^2 \quad (G)$$

$$c_v = c_v c_d^{-1} = 1 \cdot 10^{-1} = 1 / 10 \quad (H)$$

Spojením rovnic (G) a (H) dostaneme

$$c_F = 1 \quad (I)$$

Z rovnic (H) a (I) s přihlédnutím k rovnicím (C) plyne, že síla naměřená na modelu bude totožná se silou v reálném případě, jestliže na modelu budeme experimentovat s rychlostí desetkrát vyšší než v reálném případě.

Při návrhu modelového systému, modelové tekutiny a modelového děje je třeba vždy kontrolovat experimentální možnosti, případně citlivost měřicích metod. Např. při pokusech s příliš malou modelovou koulí by mohla vyjít požadovaná modelová rychlost příliš velká - blízká nebo přesahující rychlost šíření zvuku.

6.5 Teorie analogie

Teorie analogie je založena na týchž principech jako teorie podobnosti, avšak týká se porovnání systémů a dějů různé fyzikální povahy, např. se porovnává tok tekutin s tokem elektrického proudu, tok tepla s tokem hmoty apod.

Označíme-li symbolem x , resp. y veličiny příslušející jednomu, resp. druhému systému nebo ději, můžeme stejně jako v teorii podobnosti uskutečnit transformaci

$$\begin{array}{ccc} f_x (x_1, x_2, \dots, x_n) & \rightarrow & \phi_x (\pi_{x1}, \pi_{x2}, \dots, \pi_{xr}) \\ f_y (y_1, y_2, \dots, y_n) & & \phi_y (\pi_{y1}, \pi_{y2}, \dots, \pi_{yr}) \end{array} \quad (6-40)$$

Pokud mají funkce ϕ_x a ϕ_y stejný matematický tvar, potom jsou děje nebo systémy popsané funkcemi f_x a f_y analogické.

Analogie mezi dvěma systémy nebo ději různé fyzikální povahy umožňuje zkoumat experimentálně jeden systém nebo děj pomocí druhého, jehož pokusné zvládnutí je jednodušší. Např. je jednodušší měřit v proudící tekutině rozdělení místních teplot nebo elektrického potenciálu než koncentrací. Přenos výsledků se uskuteční pro *podmínku analogie*

$$\pi_{xk} = \pi_{yk}, \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (6-41)$$

Tohoto principu využívají analogy a analogové počítače.

V případě, že jsou známy diferenciální nebo integrální rovnice popisující děje různé fyzikální podstaty, je analogie dána stejným matematickým tvarem rovnic. Např. neustálené vedení tepla pevnou látkou může být popsáno rovnicí

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t \quad (6-42)$$

a molekulární difuze i-té složky rovnicí

$$\frac{\partial c_i}{\partial \tau} = D_i \nabla^2 c_i \quad (6-43)$$

kde je t - teplota, c_i - molární koncentrace složky i , τ - čas, a - teplotní vodivost, D_i - difuzivita složky i .

Jestliže teplotní vodivost a v rov.(6-42) je stejnou funkcí teploty t :

$$a = F(t) \quad (6-42a)$$

jako je difuzivita D_i v rov.(6.43) funkcí molární koncentrace c_i :

$$D_i = F(c_i) \quad (6-43a)$$

mají rov.(6-42) a (6-43) stejný matematický tvar. Potom je vedení tepla v nehybném vodiči analogické molekulární difúzi.

Za jiný příklad analogie může sloužit přestup tepla a hmoty v turbulentním režimu.

Přestup tepla v tekutině proudící trubicou popisuje empirická Dittusova-Boelterova rovnice

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4} \quad (6-44)$$

Při stejném hydrodynamickém režimu byla zjištěna empirická rovnice pro přestup hmoty:

$$Sh = 0,023 Re^{0,83} Sc^{0,44} \quad (6-45)$$

Aniž bychom vysvětlovali symboly, vidíme, že jde o rovnici prakticky stejného tvaru, a že oba děje (přestup tepla a hmoty při turbulentním proudění tekutiny) jsou analogické.

KONTROLNÍ ÚLOHY

- 6.1. Zdůvodněte, jak se liší rozměr konkrétních hodnot rychlosti $v_1 = 12 \text{ km h}^{-1}$, $v_2 = 0,18 \text{ m s}^{-1}$ a infinitezimálního přírůstku rychlosti dv .
- 6.2. Pro SI soustavu základních veličin odvoďte rozměr a) rychlosti v , b) síly F , c) plynové konstanty R .
- 6.5. Uveďte konkrétní příklady bezrozměrových výpočtových vztahů typu (6-6), s nimiž jste se již setkali.
- 6.12. Na příkladu sedimentace izolované částice ve Stokesově oblasti dané rovnicí (viz kap. 10):

$$\zeta_u = 24 / Re_u \quad [Re_u \leq 0,2] \quad (A)$$

$$Re_u \equiv \frac{v_u d_p}{\nu} \quad (B)$$

$$\zeta_u \equiv \frac{4 f d_p (\rho_s - \rho_f)}{3 v_u^2 \rho_f} \quad (C)$$

ukážte některé prakticky účelné dodatečné transformace původních kritérií podobnosti (Re_u , ζ_u).

- 6.13.** Odvoďte kritéria podobnosti π_1 a π_2 v příkladu části 6.4 (*Modelování*) rozměrovou analýzou.
- 6.14.** Průmyslová ostrohranná clona o tloušťce $\delta = 0,02$ m a průměru otvoru $d = 0,1$ m je zabudována ve vodorovné trubce o průměru $D = 0,4$ m podle obr.6.4 s délkou přímého potrubí před a za clonou $l_1'' = 20$ m, $l_2'' = 2$ m. Clona se má používat k měření hmotnostního průtoku methanu při tlaku $p = 10$ kPa a teplotě $t = 10$ °C a v rozmezí hodnot střední rychlosti v trubce $v = 15$ až 40 m s⁻¹. Jelikož je obtížné kalibrovat tuto průmyslovou clonu za použití methanu při daných podmínkách, je doporučena kalibrace vodou při teplotě $t = 20$ °C v modelovém zařízení, jehož rozměry je třeba navrhnout. Dále je třeba určit rozmezí rychlosti vody, která má být na modelu nastavována a dát návod, jak se výsledky z modelu přenesou na průmyslový systém.