

13 Rozdělení dob prodlení částic v průtočném zařízení

Hlavní cíle kapitoly: Vysvětlit smysl a způsoby testování průtočných zařízení metodou vzruchu a odezvy. Podrobněji vysvětlit pojmy pístový tok a ideální a neideální míšení, účinný a neúčinný prostor zařízení a přechodovou charakteristiku. Kvantitativně vyjádřit distribuci a hustotu pravděpodobnosti dob prodlení částic v zařízení, střední dobu prodlení a rozptyl dob prodlení částic v zařízení. Ukázat použití uvedených funkcí k přenosu výsledků získaných při diskontinuálním procesu na proces kontinuální. Pojednat o kaskádě ideálních mísičů.

Požadované znalosti: Základy bilancování, sestavení diferenciální bilance neustáleného děje, kvalitativní a kvantitativní popis míchání.

13.1 Metoda vzruchu a odezvy

S problematikou, o které pojednává tato kapitola, jsme se již předběžně seznámili:

1. v části 1.3 (str. 19) při pojednání o pístovém toku a ideálním míšení,
2. v části 6.3 (str. 132) při uplatnění rozměrové analýzy na průtočný mechanicky promíchávaný systém,
3. v části 12.2.2 (str. 275) při popisu vyrovnávání vlastností vsádky mechanickým míchadlem.

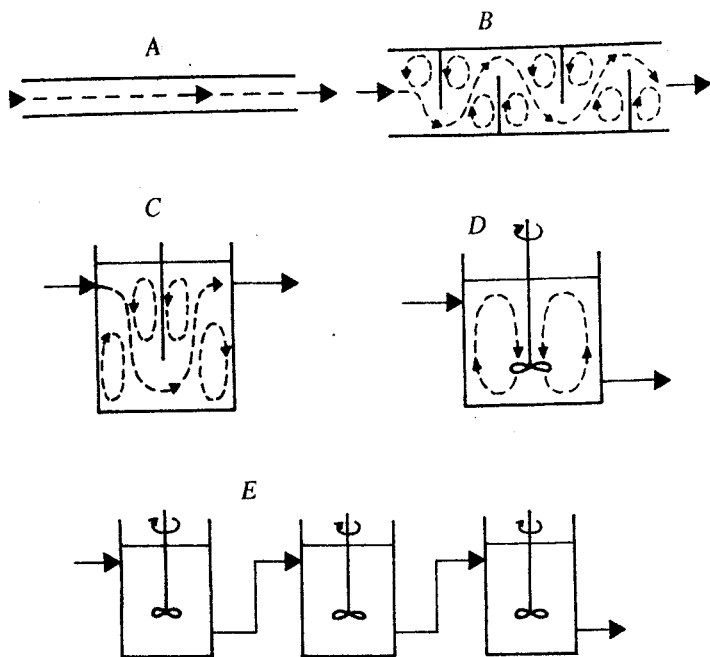
U *diskontinuálního* zařízení je doba prodlení všech částic vsádky stejná a je dána časovým intervalem mezi vyprázdněním a plněním zařízení. Přitom se předpokládá, že sledovaný proces probíhá od okamžiku naplnění do okamžiku vyprázdnění zařízení.

Naproti tomu u *průtočného* (kontinuálního) zařízení je doba prodlení (doba mezi výstupem a vstupem) různých částic různá. Je to dáno náhodným průchodem částic zařízením. Částice, které náhodně procházejí zónou vyšší rychlosti, se zdrží v zařízení kratší dobu než částice, které procházejí zónou nižší rychlosti. Zastoupení jednotlivých dob pobytu částic závisí především na *vnitřním uspořádání zařízení* a na *umístění vstupu a výstupu částic*.

Na obr. 13.1 jsou ukázány příklady různých typů průtočných zařízení. Je zřejmé, že nejmenší tendence k promíchávání částic lze předpokládat u přímé trubky (A) a největší u nádoby s míchadlem (D). Nejmenší nahodilost průchodu částic zařízením, tj. i jejich doby prodlení, lze tedy očekávat u přímé trubky a největší u nádoby s míchadlem nebo u systému s přirozeným promícháváním (např. ve fluidní vrstvě).

Doba prodlení částice v zařízení představuje dobu, po kterou se daná částice zdrží v aktivním prostoru. Tato doba prodlení v daném zařízení tedy určuje stupeň ochlazení či ohřátí, prореagování, vysušení, vyloužení, polymerace, nárůstu krystalů atd.

Znalost rozdělení dob prodlení částic v průtočném zařízení je potřebná zejména v případech částic, které si při průchodu zařízením zachovávají svou identitu. Tuto vlastnost mají dispergované částice v případech heterogenních systémů, se kterými se setkáváme při sedimentaci, fluidaci, extrakci, vyluhování, krystalizaci, při heterogenní chemické reakci apod.



Obr. 13.1. Příklady různých typů průtočných systémů

A - přímá trubka konstantního průřezu, B - přímá trubka s příčnými vestavbami, C - nádoba s příčnou přepážkou pro zne-možnění "zkratu" mezi vstupem a výstupem, D - ná-doba s míchadlem, E - série nádob s míchadly

Znalost rozdělení dob prodlení částic v průtočném zařízení má značný praktický význam, neboť umožňuje výpočet průběhu kontinuálního děje na základě znalosti průběhu děje diskontinuálního. Kromě toho představuje rozdělení dob prodlení částic významnou charakteristiku zařízení.

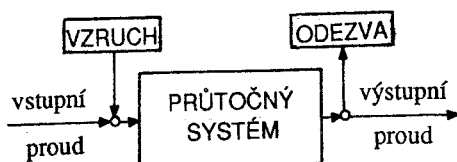
Teoretické nalezení funkce, která popisuje rozdělení dob prodlení částic, se daří jen v nejjednodušších případech, tj. tehdy, když můžeme přijmout značně idealizované předpoklady o vlivu zařízení na míšení částic. Tak v případě zařízení s *pístopým tokem částic* předpokládáme, že k míšení vůbec nedochází. Naproti tomu u *ideálního míšiče* předpokládáme, že intenzita míšení je tak vysoká, že v zařízení je všude stejné rozdělení dob prodlení částic a že sledovaná vlastnost má tedy všude stejnou hodnotu (stejnou teplotu, koncentraci sledované složky, radioaktivitu, barvu apod.).

Rozdělení dob prodlení částic v průtočném zařízení je v principu možné určit na základě znalosti rychlostního pole v celém zařízení, které však většinou neznáme a jehož pokusné stanovení je velmi pracné. Rovněž je možné propouštět zařízením značkovanou částici (odlišné barvy, radioaktivity aj.) a pokusně stanovit dobu jejího prodlení v systému. Z mnoha opakování při jedné podmínkách pak dostaneme rozdělení dob prodlení, což je rovněž velice pracné. Proto se v praxi ujala nepřímá metoda, označovaná jako *metoda vzruchu a odezvy*.

Při užití této metody se na průtočné zařízení díváme jako na tzv. *černou skříňku*, jejíž obsah a v ní probíhající děje přímo nesledujeme. Na vstupu částic do systému vytvoříme vhodný vzruch neboli *vstupní signál* a na výstupu ze zařízení sledujeme odezvu neboli *výstupní signál*. Ze souvislosti mezi výstupním a vstupním signálem určíme rozdělení dob prodlení částic v zařízení a z tvaru této funkce usuzujeme na chování systému (černé skříňky) z hlediska směšování částic.

Vhodným vstupním signálem je *změna vlastnosti částic, která se snadno určuje*. Obvykle se jako vstupní signál uplatňuje změna koncentrace složky, jejíž hodnota se snadno měří, změna teploty, radioaktivity, barvy, magnetické vlastnosti nebo elektrické vodivosti. Testování zařízení metodou vzruchu a odezvy se uskutečňuje zpravidla bez souběžného průběhu dalšího děje, např. bez chemické reakce, což budeme nadále předpokládat.

Na obr. 13.2 je vyznačen testovaný průtočný systém, u něhož se ve vstupním proudu vytvoří vhodný vzruch, tj. definovaná změna určité vlastnosti vstupního proudu, a na výstupu se sleduje časový průběh téže vlastnosti ve výstupním proudu.



Obr. 13.2. Testování průtočného systému metodou vzruchu a odezvy

U testování průtočného systému podle obr. 13.2 budeme nadále předpokládat, že hmotnostní tok vstupního proudu je stejný jako hmotnostní tok výstupního proudu a je nezávislý na čase, tj.

$$\dot{m} = \text{konst} \quad (13-1)$$

Rovněž budeme předpokládat, že hmotnost částic v systému, tzv. *zadrž*, je nezávislá na čase:

$$m_s = \text{konst} \quad (13-2)$$

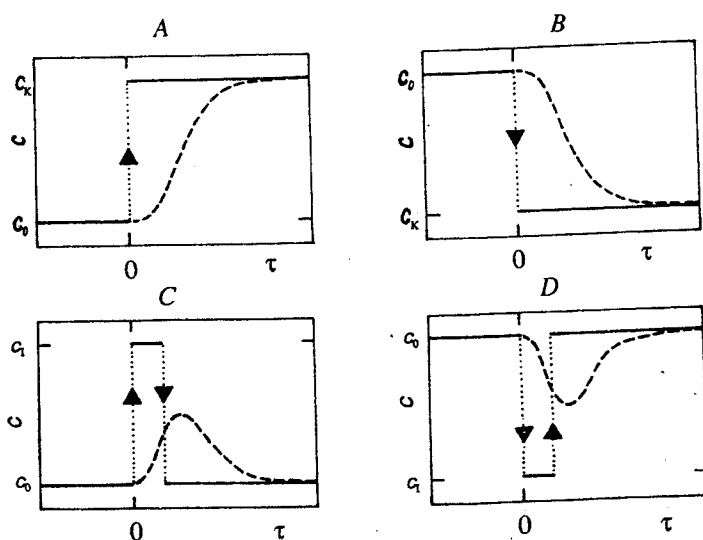
Nyní uvedeme dva nejčastěji uplatňované typy vstupních signálů pro testování průtočného systému*) vyznačených v obr. 13.3 plnou čarou (přerušovanou čarou je vyznačen výstupní signál a tečkovaně vstupní změna).

1. *Vstupním signálem je skoková změna.* Obr. 13.1A, B ukazuje příklady skokové změny hmotnostní koncentrace složky ve směsi z původní hodnoty c_0 na konečnou hodnotu c_K . V případě A platí $c_0 < c_K$, v případě B $c_0 > c_K$. Zjednodušení lze dosáhnout, když je nižší hodnota koncentrace zvolena nulová (v případě A lze zvolit $c_0 = 0$, v případě B $c_K = 0$). Okamžiku, kdy nastává skoková změna, přiřazujeme čas $\tau = 0$. V tomto okamžiku není hodnota koncentrace definována - pouze lze určit limitu zleva a zprava.

Skokovou změnu koncentrace na vstupu prakticky uskutečníme např. tak, že necháme nejprve protékat ze zásobníku směs o koncentraci c_0 konstantním tokem $\dot{m}$. Když jsou

*) Nejčastěji používanými vstupními signály jsou skoková změna a impuls. Kromě toho se k testování průtočných zařízení používají též vstupní signály jako periodická nebo náhodná změna sledované veličiny. Podrobnější informace uvádí četná literatura, např. [50].

podmínky na vstupu, v zařízení a na výstupu ustálené, přepneme dávkování vstupující směsi na zásobník obsahující směs o koncentraci sledované složky C_K .



Obr. 13.3. Příklady koncentračních vstupních a odpovídajících výstupních signálů

A, B - skoková změna,
C, D - impuls

2. *Vstupním signálem je impuls.* Obr. 13.3C, D ukazují vstupní signály ve formě impulsu. V těchto případech je základní hmotnostní koncentrace vstupního proudu udržována na hodnotě C_0 a po velmi krátkou dobu $\Delta\tau \rightarrow 0$ je změněna na hodnotu C_1 . V případě C platí $C_0 < C_1$ a v případě D platí $C_0 > C_1$. Obdobně jako u skokové změny můžeme nižší hodnotu koncentrace zvolit za nulovou. Okamžiku, kdy nastal impuls, přiřazujeme čas $\tau = 0$.

Impuls na vstupu prakticky uskutečníme tak, že do vstupujícího proudu o koncentraci C_0 vložíme během co nejkratší doby dávku značkovací látky tak, že se krátkodobě změní vstupní koncentrace z hodnoty původní na hodnotu C_1 .

Odezva ve výstupním proudu na vstupní signál může mít velmi rozmanitý průběh podle typu zařízení. V obr.13.3 jsou ukázány některé příklady tvarů odezvy. Odezvou je zde závislost hmotnostní koncentrace složky na čase, tj. funkce $C(\tau)$. Sledovanou veličinou může být ovšem i např. vodivost roztoku, teplota směsi, počet částic odlišné barvy apod.

13.2 Distribuční funkce a hustota pravděpodobnosti dob prodlení

Testování systému pomocí skokového vstupního signálu (obr.13.3A,B) umožňuje

snadné určení *distribuční funkce* dob prodlení částic v zařízení $F(\tau)$, která je definována^{*)}

$$F(\tau) \equiv \frac{\alpha(\tau) - c_0}{c_K - c_0} \quad (13-3)$$

$$F(\tau) \in <0; 1> \quad (13-3a)$$

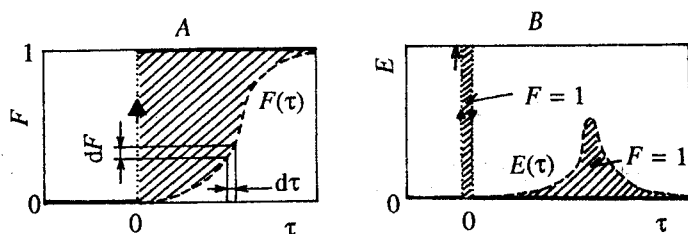
Hodnota funkce $F(\tau)$ představuje pravděpodobnost, že se částice v průtočném systému zdrží po dobu 0 až τ . V teorii regulace se funkce $F(\tau)$ nazývá *přechodovou funkcí*. Distribuční funkce F , jak plyne z definice (13-3), je bezrozměrová, tj. platí

$$[F] = 1$$

Distribuční funkce $F(\tau)$ je funkce *neklesající*, mající pouze kladné hodnoty. Platí

$$F(\tau = 0) = 0 \quad F(\tau \rightarrow \infty) = 1 \quad (13-3b)$$

Na obr.13.4A je zakreslen tvar vstupního a výstupního signálu jako závislost $F(\tau)$. Lze ukázat, že oba případy vyobrazené na obr.13.3A,B jsou v obr.13.4 reprezentovány křivkou neklesající.



Obr.13.4. Znázornění průběhu vstupního a výstupního signálu pomocí časového průběhu funkcí F (případ A) a E (případ B)

Diferenciál funkce $F(\tau)$ je $dF(\tau)$ a představuje pravděpodobnost, že se částice zdrží v průtočném systému po dobu τ až $(\tau + d\tau)$. Derivace funkce $F(\tau)$ podle času τ potom představuje hustotu pravděpodobnosti dob prodlení^{**)}

$$E(\tau) \equiv \frac{dF(\tau)}{d\tau} \quad (13-4)$$

^{*)} Definici distribuční funkce $F(\tau)$ zapisujeme pomocí hmotnostní koncentrace složky. V případě, že je sledovanou veličinou teplota nebo jiná veličina, je definice $F(\tau)$ analogická.

^{**)} Někdy se funkce $E(\tau)$ nazývá v literatuře frekvenční funkcí a označuje se $f(\tau)$.

$$E(\tau) \in \langle 0 ; \infty \rangle$$

(13-4a)

Je zřejmé, že pro rozměr veličiny E platí

$$[E] = T^{-1}$$

Funkci $F(\tau)$ dostaneme integrací funkce $E(\tau)$:

$$F(\tau) = \int_0^{\tau} E(\tau) d\tau \quad (13-5)$$

Platí ovšem

$$\int_0^{\infty} E(\tau) d\tau = \int_0^1 dF = 1 \quad (13-5a)$$

Na obr.13.4B je ukázán průběh funkce $E(\tau)$, přičemž vstupní signál není zakreslen celý, jelikož dosahuje velmi vysokých hodnot. Přerušovanou křivku $E(\tau)$ na obr.13.4B dostaneme derivací křivky $F(\tau)$ z obr.13.4A, jak plyne z rov.(13-4). Plocha pod vstupním i výstupním signálem je rovna jedné, jak plyne z rov.(13-5a).

V části 1.3 jsme uvedli rovnici pro výpočet střední doby prodlení částic v zařízení:

$$\bar{\tau} = m_s / \dot{m} \quad (1-1)$$

Platnost této rovnice je omezena předpokladem, že m_s je hmotnost částic pouze v *aktivním prostoru zařízení* (viz kap.1, str.20). Pokud by hodnota m_s zahrnovala i částice v neúčinném prostoru, rov.(1-1) by poskytla nesprávný výsledek.

Univerzální vztahy pro výpočet střední doby prodlení poskytují funkce $F(\tau)$ a $E(\tau)$:

$$\bar{\tau} = \int_0^1 \tau dF(\tau) = \int_0^{\infty} \tau E(\tau) d\tau \quad (13-6)$$

Z hlediska matematické statistiky představuje *střední doba prodlení* $\bar{\tau}$ daná rov. (13-6) první základní statistický moment distribuční funkce dob prodlení. Druhým centrálním momentem distribuční funkce dob prodlení je *rozptyl* (nebo jeho druhá odmocnina, tj. směrodatná odchylka):

$$\sigma_{\tau}^2 = \int_0^1 (\tau - \bar{\tau})^2 dF(\tau) = \int_0^{\infty} (\tau - \bar{\tau})^2 E(\tau) d\tau \quad (13-7)$$

Po úpravě dostaneme

$$\sigma_{\tau}^2 = \int_0^1 \tau^2 dF(\tau) - \bar{\tau}^2 = \int_0^{\infty} \tau^2 E(\tau) d\tau - \bar{\tau}^2 \quad (13-7a)$$

Rozptyl σ_{τ}^2 informuje o šířce rozložení dob prodlení kolem střední hodnoty $\bar{\tau}$.

Dále ukážeme, jak lze pomocí diferenciální bilance odvodit tvar funkcí $F(\tau)$ a $E(\tau)$, jestliže budeme předpokládat, že se systém chová jako *ideální mísič*.

13.3 Diferenciální bilance pro ideální míšení

Budeme uvažovat stejnou situaci jako na obr.6.2. Zde je vyobrazena průtočná soustava s mechanickým míchadlem (viz též obr.13.1D). Soustavou protéká vodný roztok soli o malé hodnotě hmotnostní koncentrace c_0 . Objemový tok $\dot{V} = \text{konst.}$ a objem vsádky (zádrže) v nádobě $V_s = \text{konst.}$ Předpokládáme, že se soustava chová jako ideální mísič. V čase $\tau = 0$ změním vstupní koncentraci skokově na stálou hodnotu c_K při původní hodnotě objemového přítoku $\dot{V}$ a při téže hodnotě V_s . Při malé koncentraci soli lze předpokládat, že se objemový tok roztoku průchodem nádobou nemění, $\dot{V} = \text{konst.}$ Pro časy $\tau > 0$ se bude výstupní koncentrace měnit s časem, tj. $c = c(\tau)$, a systém je tedy v *neustáleném stavu*.

Závislost $c(\tau)$ určíme pomocí diferenciální bilance rozpuštěné složky pro diferenciální časový interval $d\tau$:

$$\text{VSTUP} = \text{VÝSTUP} + \text{AKUMULACE}$$

$$\dot{V} c_K d\tau = \dot{V} c(\tau) d\tau + V_s dc(\tau) \quad (13-8)$$

Zde jsme uplatnili předpoklad, že se systém chová jako ideální mísič, pro který platí pro daný okamžik τ , že koncentrace v celém prostoru mísiče je stejná a rovná se koncentraci na výstupu $c(\tau)$, a že sledovaná složka nepodléhá chemické reakci.

Separace proměnných v rov.(13-8) poskytne diferenciální rovnici

$$\frac{dc(\tau)}{c(\tau) - c_K} = - \frac{\dot{V}}{V_s} d\tau \quad (13-8a)$$

Integraci v mezích $\langle c_0 ; c_K \rangle$ a $\langle 0 ; \tau \rangle$ dostaneme

$$\ln \frac{c(\tau) - c_K}{c_0 - c_K} = - \frac{\dot{V}}{V_s} \tau \quad (13-9)$$

resp.

$$c(\tau) = (c_0 - c_K) \exp \left(- \frac{\dot{V}}{V_s} \tau \right) + c_K \quad (13-9a)$$

Zavedeme tytéž bezrozměrové proměnné jako v části 6.3, tj. bezrozměrovou koncentraci:

$$C \equiv \frac{c - c_K}{c_0 - c_K} \quad (13-10a)$$

a bezrozměrový čas:

$$\theta \equiv \frac{\dot{V} \tau}{V_s} = \tau / \bar{\tau} \quad (13-10b)$$

Rovnici (13-9a) potom můžeme přepsat do bezrozměrového tvaru

$$C = \exp (- \theta) \quad (13-11)$$

13.4 Distribuční funkce a hustota pravděpodobnosti dob prodlení pro ideální míšení a pro pístový tok

Porovnáme-li definici distribuční funkce F (13-3) s definicí bezrozměrové koncentrace (13-10a), vidíme, že platí

$$F = 1 - C \quad (13-12)$$

Z rov. (13-12) a (13-11) potom plyne *distribuční funkce*

$$F = 1 - \exp (-\theta) \quad [\text{IDEÁLNÍ MÍŠENÍ}] \quad (13-13)$$

Distribuční funkce dob prodlení při *pístovém toku* má tvar jednotkové skokové funkce, neboť všechny částice se zdrží v systému přesně dobu $\bar{\tau}$ ($\theta = 1$):

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < 1 \\ 1, & \theta > 1 \end{cases} \quad [\text{PÍSTOVÝ TOK}] \quad (13-14)$$

Hodnota funkce F není definována v čase $\tau = \bar{\tau}$, tj. pro $\theta = 1$ (dochází ke skoku). Jsou pouze určeny limity zleva a zprava:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 1-} F(\theta) &= 0 \\ \lim_{\theta \rightarrow 1+} F(\theta) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (13-14a)$$

Hustota pravděpodobnosti E je podle rov.(13-4) derivací distribuční funkce F podle času τ . Z rov.(13-13) pro *ideální míšení* tedy dostaneme:

$$E = \frac{1}{\tau} \exp(-\theta) \quad [\text{IDEÁLNÍ MÍŠENÍ}] \quad (13-15)$$

V případě *píستového toku* má hustota pravděpodobnosti tvar Diracovy δ -funkce:

$$\left. \begin{aligned} E(\theta) &= \begin{cases} 0, & \theta < 1 \\ 0, & \theta > 1 \end{cases} \\ E(\theta = 1) &= \delta, \delta \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} [\text{PÍSTOVÝ TOK}] \quad (13-16)$$

13.5 Kaskáda ideálních míšičů

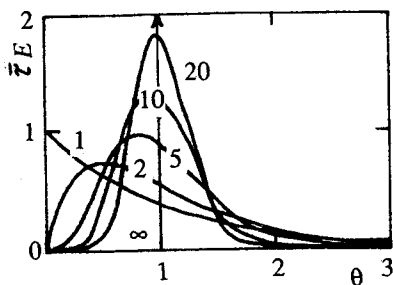
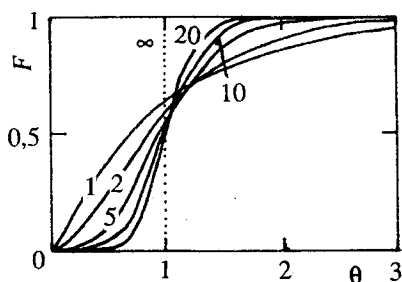
Značná nerovnoměrnost dob prodlení částic v *jednočlenném ideálním míšiči* je často nevýhodou tohoto zařízení, neboť nerovnoměrné rozložení doby prodlení částic způsobuje jejich nerovnoměrné proreagování, vysušení, vyloužení, nárůst krystalů v krystalizátoru apod. Pro snížení této nerovnoměrnosti se zařazuje několik míšičů do série, jak ukazuje např. obr.13.1E.

Budeme uvažovat N ideálních míšičů zařazených do série (kaskáda N míšičů). Jednotlivé míšiče označíme pořadovým číslem $k = 1, 2, \dots, N$ ve směru pohybu sledovaných částic. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že účinný objem každého členu kaskády je stejný a nezávislý na čase:

$$V_{sk} = \text{konst} \quad (13-17)$$

Tvar distribuční funkce na výstupu z N -tého členu kaskády pak dostaneme z diferenciálních bilancí zapsaných pro jednotlivé členy kaskády po jejich integraci. Přitom předpokládáme, že vstupní koncentrace do k -tého členu je rovna výstupní koncentraci z předchozího členu, tj. $C_{k-1}(\tau)$.

Matematické řešení vedoucí k funkcím F a E zde neuvádíme pro jejich značnou komplikovanost. Na obr.13.5 jsou výsledky řešení ukázány v grafické formě.



Obr.13.5. Průběh funkcí F a E v závislosti na bezrozměrovém čase $\theta \equiv \tau / \bar{\tau}$ pro různý počet N ideálních mísičů v kaskádě

Oba grafy jsou zakresleny v bezrozměrovém tvaru. Vedle bezrozměrového času $\theta \equiv \tau / \bar{\tau}$ je v případě funkce E , která není bezrozměrová, užít bezrozměrový součin $\bar{\tau} E$. Je vidět, že se nerovnoměrnost dob prodlení částic v kaskádě s narůstajícím počtem členů N snižuje. Při $N \rightarrow \infty$ se kaskáda ideálních mísičů chová jako systém s pístovým tokem.

Podle rov.(13-17) je účinný objem celé N -členné kaskády:

$$V_{Sc} = \sum_{k=1}^N V_{Sk} = N V_{Sk} \quad (13-18)$$

Za předpokladu, že objemový tok každým členem kaskády $\dot{V}$ je stejný, je střední doba prodlení částic v celé kaskádě:

$$\bar{\tau}_c = V_{Sc} / \dot{V} = (1 / \dot{V}) \sum_{k=1}^N V_{Sk} = \sum_{k=1}^N \bar{\tau}_k = N \bar{\tau}_k \quad (13-19)$$

Obecně lze ovšem střední dobu prodlení $\bar{\tau}_c$ vyjádřit analogicky k rov.(13-6):

$$\bar{\tau}_c = \int_0^{\infty} \tau E(\tau ; N) d\tau \quad (13-20)$$

Velmi důležitá je znalost rozptylu dob prodlení v kaskádě σ_c^2 . Jak jsme uvedli, vede zvýšený počet členů ideálních mísičů v kaskádě ke snížení tohoto rozptylu. Obecně lze rozptyl σ_c^2 vyjádřit analogicky k rov.(13-7a)

$$\sigma_c^2 = \int_0^{\infty} \tau^2 E(\tau ; N) d\tau - \bar{\tau}_c^2 \quad (13-21)$$

Pro kaskádu ideálních mísičů lze určit jejich nezbytný počet, aby byl při střední době

prodlení $\bar{\tau}_c$ dosažen požadovaný rozptyl σ_c^2 , tímto postupem:

Nejdříve vyjádříme pomocí rov.(13-7a) rozptyl dob prodlení částic v k -tém členu kaskády ideálních mísičů, který označíme σ_k^2 :

$$\sigma_k^2 = \int_0^{\infty} \tau^2 E(\tau) d\tau - \bar{\tau}_k^2 \quad (13-22)$$

Po dosazení za funkci E z rov.(13-15) a podle tabulky integrálů (např.[51, str.378]) dostaneme vyjádření integrálu v rov.(13-22):

$$\int_0^{\infty} \tau^2 E(\tau) d\tau = \bar{\tau}_k^2 \int_0^{\infty} \theta^2 \exp(-\theta) d\theta = [(-\theta^2 - 2\theta - 2) \exp(-\theta)] \Big|_0^{\infty} \bar{\tau}_k^2 = 2 \bar{\tau}_k^2 \quad (13-23)$$

Spojení rovnic (13-22) a (13-23) poskytne:

$$\sigma_k^2 = \bar{\tau}_k^2 \quad (13-24)$$

Podle rov.(13-19) platí:

$$\sigma_k^2 = \bar{\tau}_c^2 / N^2 \quad (13-25)$$

Podle [23, str.291] pro $\bar{\tau}_k = \text{konst}$ platí:

$$\sigma_c^2 = \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 = N \sigma_k^2 \quad (13-26)$$

Spojením rovnic (13-25) a (13-26) dostaneme nezbytný počet členů kaskády pro zjištění daného rozptylu dob prodlení σ_c^2 při dané střední době prodlení $\bar{\tau}_c$ v celé kaskádě:

$$N = (\bar{\tau}_c / \sigma_c)^2 \quad (13-27)$$

Funkce E a F jsou pro kaskádu ideálních mísičů určeny rovnicemi:

$$\bar{\tau} E(\theta, N) = [N^N / (N-1)!] \theta^{(N-1)} \exp(-N\theta) \quad (13-28)$$

$$F(\theta; N) = 1 - \exp(-N\theta) \sum_{k=1}^N \left[\frac{N^{(N-k)}}{(N-k)!} \theta^{(N-k)} \right] \quad (13-29)$$

Rovnice (13-28) a (13-29) jsou uváděny pouze pro ilustraci a byly užity při konstrukci obr.13.15.

13.6 Přepočet průběhu diskontinuálního děje na děj kontinuální

V laboratorních podmínkách se kinetika různých dějů zpravidla výhodněji zjišťuje při jejich *diskontinuální* realizaci, ačkoliv v praxi se často požaduje realizace *kontinuální*. Při diskontinuálních pokusech se spotřebuje méně pokusného materiálu, za kratší dobu se získá více informací a odpadají problémy s konstantním dávkováním malých kvant ap. U rychlých dějů však musíme být schopni zachytit jejich průběh, což klade nároky na sběr a zpracování dat (v současné době se k tomuto účelu využívá počítače).

Abychom mohli uskutečnit přepočet průběhu diskontinuálního procesu na kontinuální proces (v průtočném systému), musíme znát zastoupení dob prodlení částic v systému. Dále uvedený způsob se týká případů, kdy částice, procházející systémem a účastníci se sledovaného děje, zachovávají svoji identitu.

Uvažujeme *diskontinuální děj*, jehož časový průběh při určitých podmínkách bude

$$X = X(\tau) \quad [\text{DISKONTINUÁLNÍ DĚJ}] \quad (13-30)$$

Veličina X charakterizuje stav systému v daném čase při diskontinuálním ději (např. relativní hmotnostní zlomek složky podléhající chemické přeměně nebo obsah vody v sušeném materiálu).

Při *kontinuálním ději* bude veličina X na výstupu ze zařízení vykazovat vlivem nestejně hodnoty doby prodlení jednotlivých částic spektrum hodnot. Zpravidla se kontinuální proces popisuje jako závislost střední hodnoty $\bar{X}$ na výstupu ze zařízení na střední době prodlení $\bar{\tau}$, tj. jako funkce

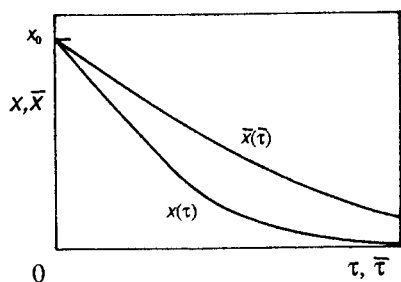
$$\bar{X} = \bar{X}(\bar{\tau}) \quad [\text{KONTINUÁLNÍ DĚJ}] \quad (13-31)$$

Průběh kontinuálního děje určíme pomocí vztahu

$$\bar{X}(\bar{\tau}) = \int_0^{\infty} X(\tau) E(\tau; \bar{\tau}) d\tau \quad (13-32)$$

kde je u funkce E vyznačeno, že střední doba prodlení $\bar{\tau}$ představuje parametr (při výpočtech integrálu se postupně dosazuje různá hodnota $\bar{\tau}$).

Na obr.13.6 je porovnán průběh diskontinuálního sušení (X je zde relativní hmotnostní zlomek vody v sušeném materiálu) a kontinuálního sušení v sušárně, která se chová jako jednostupňový ideální mísič.



Obr.13.6. Porovnání průběhu diskontinuálního a kontinuálního sušení (kontinuální sušárna se chová jako ideální mísič)

Z obrázku je vidět, že kontinuální proces probíhá vlivem promíchávání částic v systému pomaleji než proces diskontinuální při jinak stejných podmínkách. K dosažení stejné střední vlhkosti materiálu $\bar{X}$ na výstupu ze sušárny, jako je zvolená vlhkost X u diskontinuálního děje v čase τ , je třeba větší střední doby prodlení částic v kontinuálním zařízení, tj. pro $\bar{X} = X$ platí $\bar{\tau} > \tau$.

Pouze v případě, že se kontinuální zařízení chová jako systém s pístovým tokem částic, bude pro stejný případ platit $\bar{\tau} = \tau$, tj. kontinuální děj probíhá stejně rychle jako diskontinuální. V tom případě by křivka $X(\tau)$ v obr.13.6 platila i pro kontinuální děj, např. při sušení materiálu na sítu ve formě pásového transportéru pohybujícím se konstantní rychlostí v_T , které je příčně profukované sušicím vzduchem. Je-li délka transportního zařízení L , je celková doba pobytu všech částic stejná, tj. $\bar{\tau} = L / v_T$.

Chceme-li se informovat o nerovnoměrnosti výstupní hodnoty X , vypočteme kromě střední hodnoty $\bar{X}$ ještě rozptyl σ_X^2 veličiny X :

$$\sigma_X^2(\bar{\tau}) = \int_0^{\infty} [X(\tau) - \bar{X}(\bar{\tau})]^2 E(\tau; \bar{\tau}) d\tau \quad (13-33)$$

Po úpravě dostaneme

$$\sigma_X^2(\bar{\tau}) = \int_0^{\infty} X^2(\tau) E(\tau; \bar{\tau}) d\tau - \bar{X}^2(\bar{\tau}) \quad (13-33a)$$

I když se z hlediska rozdělení dob prodlení jeví zařízení s míšením částic jako nevýhodné, je často výhodné nebo dokonce nezbytné z jiného důvodu: Míšení uvnitř systému silně zvyšuje intenzitu procesu (např. sdílení tepla) a zabraňuje např. slepování částic a nalepování na stěny nebo jinak zvyhodňuje aparaturní řešení.

KONTROLNÍ ÚLOHY

- 13.3. Dokažte, že rozměr hustoty pravděpodobnosti dob prodlení $E(\tau)$ je T^{-1} .
- 13.6. Odvoďte z rov.(13-7) rovnici (13-7a).
- 13.7. Určete hodnotu bezrozměrové koncentrace C definované rov.(13-10a) a distribuční

funkce F definované rov.(13-3) v čase, který je roven střední době prodlení, jestliže se systém chová jako ideální mísič.

- 13.8. Dokažte platnost rov.(13-12).
- 13.9. Uskutečnime-li na vstupu do průtočného systému v čase $\tau = 0$ skokovou změnu koncentrace z hodnoty c_0 na hodnotu c_k , za jakou dobu bude na výstupu dosaženo 95 % vstupní skokové změny, jestliže se systém chová jako ideální mísič?
- 13.10. Vysvětlete, jak lze z obr. 13.5 poznat, že se nerovnoměrnost dob prodlení částic snižuje s narůstajícím počtem členů N v kaskádě.
- 13.11. Ukažte, že v případě ideálního mísiče platí $\lim_{\theta \rightarrow 1} \bar{\tau} E(\theta) = 1 / e$.*)
- 13.12. Ukažte, že rov.(13-28) a (13-29) přecházejí pro případ jednoho ideálního mísiče na rov.(13-15) a (13-13).
- 13.17. Uplatněte rovnici (13-32) pro případ, že se zařízení chová jako ideální mísič, a že platí $X(\tau) = A + B\tau$, kde $A > 0$, $B < 0$.
- 13.18. Proved'te úpravu rov.(13-33) na rov.(13-33a).

*) Konstanta $e = 2,7183$ je základ přirozených logaritmů.