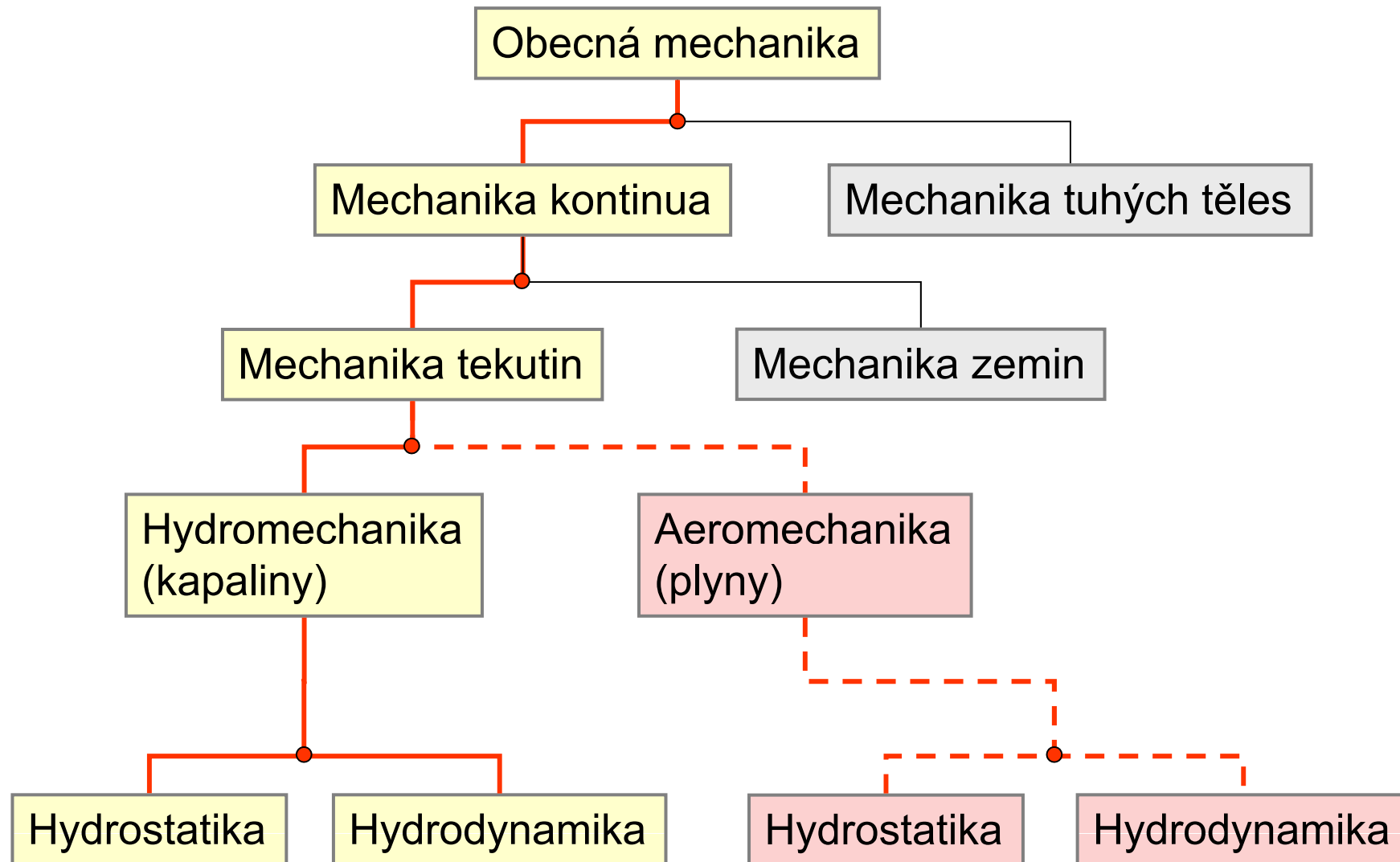


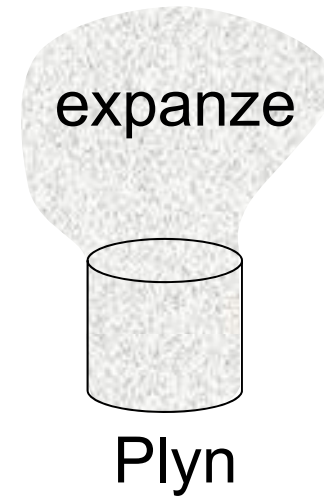
MECHANIKA TEKUTIN

Fyzikální vlastnosti tekutin



Plyny (páry)

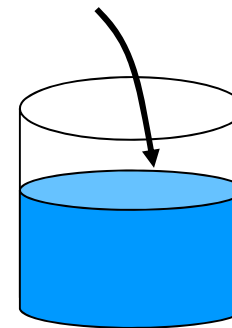
- stlačitelné
- vždy zcela zaujme příslušný objem zásobníku
- nemají volnou hladinu



Kapaliny

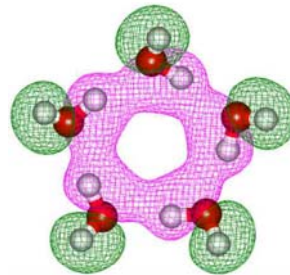
- nestlačitelné (neuvažujeme velmi vysoké tlaky)
- v otevřené nádobě vytvoří hladinu
- nemůže samovolně zvětšit svůj objem

volná hladina



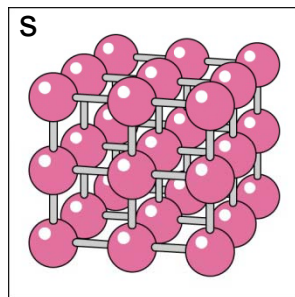
Kapalina

- uvažujeme izotropní spojité prostředí (neplatí pro plyny při nízkých tlacích)
- pracujeme s útvary, jejichž délkové rozměry jsou mnohem větší než je střední mezimolekulární vzdálenost
 - 10^{-8} m (plyny)
 - 10^{-10} m (kapaliny)

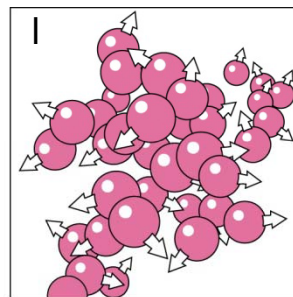


vzduch:

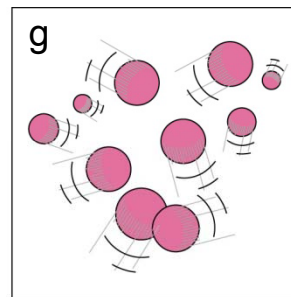
elementární objem: $dV^* = 10^{-9} \text{ mm}^3$
obsahuje 3×10^7 molekul



(a)



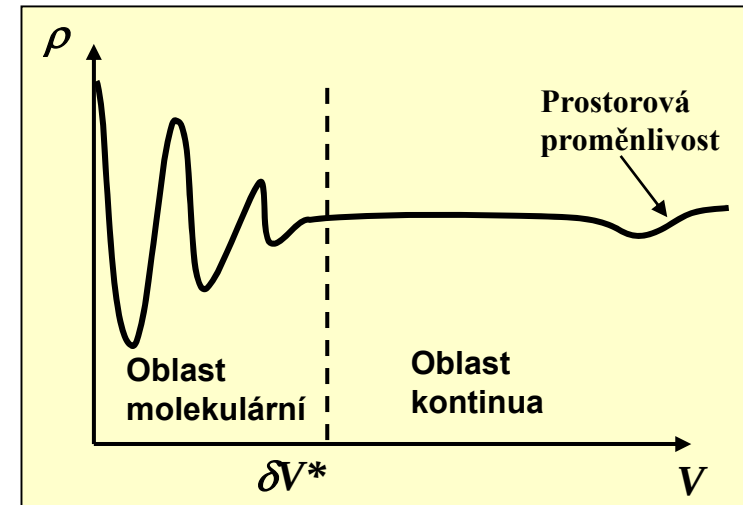
(b)



(c)

izotropní = fyzikální vlastnosti nezávisejí na směru v němž jsou měřeny

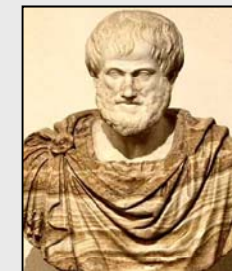
kontinuum = spojité prostředí



Základní koncept kontinua

Aristotelés ze Stagiry

(384 – 322 př.n.l.)



- řecký filosof, žák Platónův
- vychovatel Alexandra III. Velikého

Stavové veličiny (tlak, teplota)

5

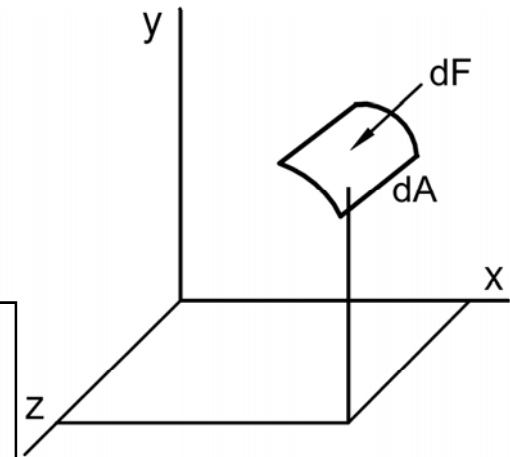
Tlak

- intenzivní veličina
- silový účinek molekul na jednotku plochy
(tlak je síla působící na jednotku plochy ve směru normály)

$$p = \frac{dF}{dA}$$

$$\text{Pa} = \text{Nm}^{-2} = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ bar} &= 1 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ 1 \text{ at} &= 9,80665 \cdot 10^4 \text{ Pa} \\ 1 \text{ atm} &= 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ 1 \text{ Torr} &= 133,32 \text{ Pa} \\ 1 \text{ mmHg} &= 133,32 \text{ Pa} \\ 1 \text{ lbf/in}^2 (\text{psi}) &= 6894,76 \text{ Pa} \\ 1 \text{ lbf/ft}^2 (\text{psf}) &= 47,88 \text{ Pa} \end{aligned}$$



Teplota

- intenzivní veličina

$$\begin{aligned} T[\text{K}] &= t[^\circ\text{C}] + 273,15 \\ t[^\circ\text{F}] &= t[^\circ\text{C}] * \frac{9}{5} + 32 \\ t[^\circ\text{C}] &= (t[^\circ\text{F}] - 32) * \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Intenzivní veličina (neaditivní) nezávisí na rozměrech tělesa.

Hustota (specifická/měrná hmotnost)

= hmotnost materiálu na jednotku objemu

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (\text{hustota v bodě})$$

Předpoklady:

- velký počet molekul (běžné technické výpočty, normální podmínky)
- elementární objem tekutiny má stejné vlastnosti jako okolní tekutina

$$\rho = \frac{m}{V}$$

m ← hmotnost (kg)
 V ← objem (m³)
příslušné tekutiny

Specifický objem

$$v = \frac{1}{\rho} \quad (\text{m}^3 \text{ kg}^{-1})$$

Specifická hustota

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho_{H_2O, 4^\circ\text{C}}}$$

Specifická tíha

$$\gamma = \rho g \quad (\text{N m}^{-3})$$

tíhové zrychlení: 9,807 ms⁻²

Stavové veličiny (hustota)

7

Hustota (závislosti na T , p)

Kapaliny

- hustota se mění s teplotou a tlakem málo
- příklad: voda ($p = \text{konst. } 101 \text{ kPa}$)

$$\rho_{20^\circ\text{C}} = 998,2 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\rho_{80^\circ\text{C}} = 971,8 \text{ kg m}^{-3}$$

Plyny

- hustota se mění s teplotou a tlakem
- příklad: vzduch ($p = \text{konst. } 101 \text{ kPa}$)

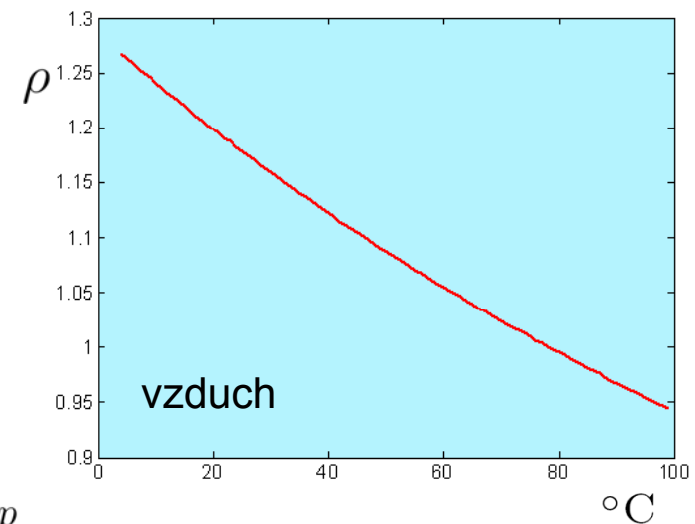
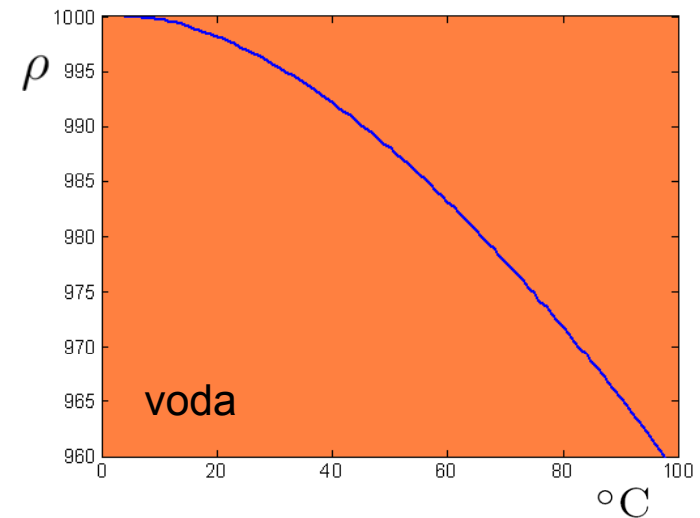
$$\rho_{20^\circ\text{C}} = 1,205 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\rho_{80^\circ\text{C}} = 1,00 \text{ kg m}^{-3}$$

ideální plyn

$$pV = nRT \rightarrow pV = \frac{m}{M}RT \rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT}$$

$$\rho_{VZ} = \frac{M_{VZ}p}{RT} = \frac{28,84 \cdot 10^{-3}}{8,314} \frac{p}{273,15 + t} = 3,469 \cdot 10^{-3} \frac{p}{273,15 + t}$$



Stavové veličiny (stlačitelnost)

8

Stlačitelnost = schopnost změnit objem při změně tlaku
- při stlačení zmenšujeme střední vzdálenost molekul

Součinitel stlačitelnosti

$$\kappa = -\frac{1}{V_0} \left(\frac{dV}{dp} \right)_{T=\text{konst}} \quad \text{Pa}^{-1}$$

změna objemu

změna tlaku (rozdíl tlaku před stlačením a po něm)

původní objem tekutiny

Modul objemové pružnosti

$$K = \frac{1}{\kappa} \quad \text{Pa}$$

Hodnoty (normální teplota)

Voda: $K = 2,36 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

Vzduch: $K = 4,85 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

=> stlačitelnost plynů je cca 10^4 krát větší než u kapalin

Kapaliny

- při stlačení budou molekulové síly odpudivé větší než síly přitažlivé

$$\kappa = -\frac{1}{V_0} \left(\frac{dV}{dp} \right)_{T=\text{konst}} \quad \text{Pa}^{-1}$$

$$\kappa V_0 dp = -dV$$

$$\kappa V_0 (p - p_0) = V_0 - V$$

Objem kapaliny po stlačení

$$V = V_0 [1 - \underbrace{\kappa(p - p_0)}_{\Delta p}]$$

Nárůst hustoty při zmenšení objemu
- předpoklad konstantní hmotnosti

$$m = \rho V$$

$$dm = d(\rho V) = 0$$

$$d\rho V + \rho dV = 0$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{d\rho}{dp} \right)_{T=\text{konst}} \quad \text{Pa}^{-1}$$

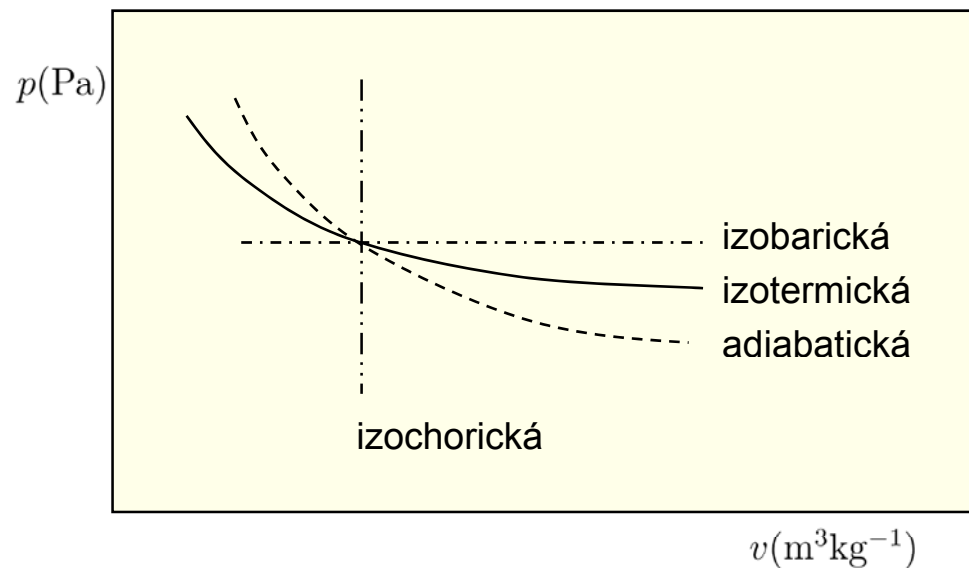
Plyny

- molekuly plynů jsou od sebe natolik vzdálené, že síly přitažlivé a odpuzivé nemají podstatný význam
- každou změnu objemu současně doprovází změna teploty, která může být vyjádřena:

$$p v^n = \text{konst.}$$

polytropický exponent

specifický objem $v = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{m}$



Ideální plyn – molekuly na sebe nepůsobí žádnými silami

izobarická: $n = 0$ ($p = \text{konst.}$)

izotermická: $n = 1$ ($T = \text{konst.}$)

izochorická: $n = \infty$ ($V = \text{konst.}$)

adiabatická: $n = \frac{c_p}{c_v}$ ($Q = \text{konst.}$)

Př. izotermická změna
(Boyleův-Mariottův zákon)

$$p_0 V_0 = p V$$

na počátku po stlačení

Tepelná roztažnost

- předpokládáme konst. hmotnost při zahřátí

Součinitel tepelné roztažnosti

$$\beta = -\frac{1}{V_0} \left(\frac{dV}{dT} \right)_{p=\text{konst}} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{d\rho}{dT} \right)_{p=\text{konst}} \quad \text{K}^{-1}$$

Kapaliny

$$V = V_0[1 + \beta(t - t_0)]$$

Ideální plyn

$$\beta = 1/T$$

Hodnoty pro vodu (normální tlak)

$$\beta_{0^\circ\text{C}} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\beta_{20^\circ\text{C}} = 20,7 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\beta_{50^\circ\text{C}} = 45,7 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\beta_{80^\circ\text{C}} = 64,3 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

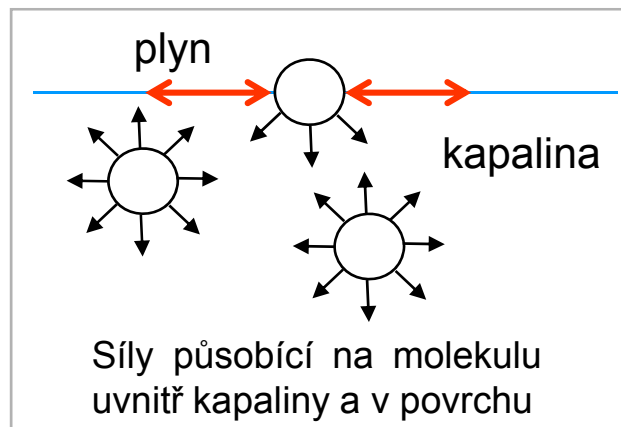
Kombinace: $V = V(T, p)$

$$dV = \left(\frac{dV}{dT} \right)_p + \left(\frac{dV}{dp} \right)_T$$

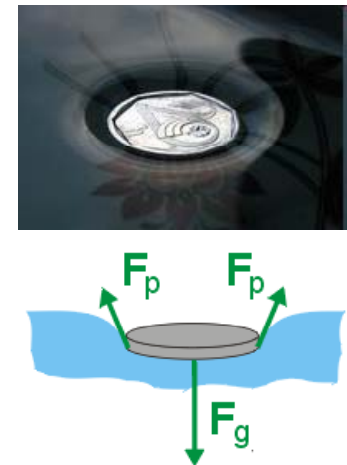
$$dV = V_0 (\beta dT - \kappa dp)$$

Povrchové napětí

- na molekuly kapaliny v jejím povrchu působí přitažlivými silami vnitřní molekuly kapaliny => výslednicí je síla mířící dovnitř kapaliny
- molekuly plynu/páry mají podstatně větší vzdálenosti, a proto je jejich silové působení na povrchové molekuly velmi malé



=> působení sil má kapalina tendenci zmenšit svůj povrch na minimum
- koule (kapičky, bublinky)

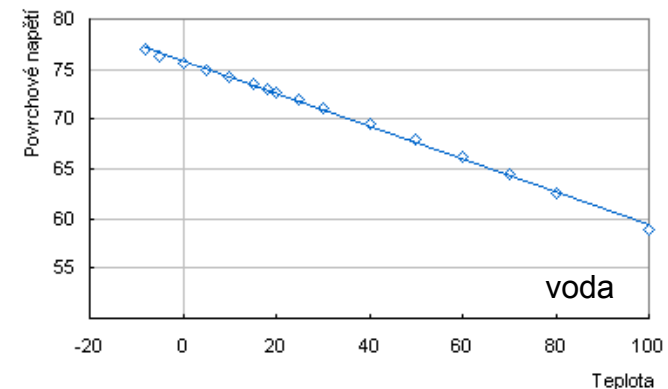


Povrchové napětí je síla, která působí ve směru tečny k povrchu na úsečku jednotkové délky .

- síla je stejná ve všech směrech povrchu.

$$\gamma = \frac{F}{\ell} \text{ Nm}^{-1}$$

S rostoucí teplotou klesá uplatnění přitažlivých sil
=> klesá hodnota povrchového napětí

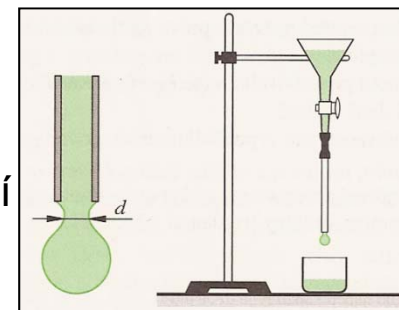


Měření

Kapková metoda

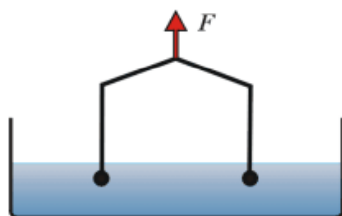
- rostoucí kapka odkápně v okamžiku, kdy se její váha stane větší než povrchová síla působící po obvodu v nejužším místě kapky
- v okamžiku odkápnutí platí:

$$m g = \gamma \pi d \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{m g}{\pi d}$$



Du Noüyho metoda odtrhování prstence

- siloměrem se měří velikost síly bránící odtržení kroužku od blanky na hladině vody tvořené povrchovým napětím

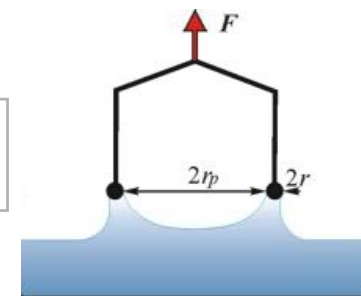


$$\gamma = \frac{F}{4 \pi r_p} \Phi$$

síla potřebná k odtržení

korekční faktor na ulpěnou kapalinu

poloměr prstence

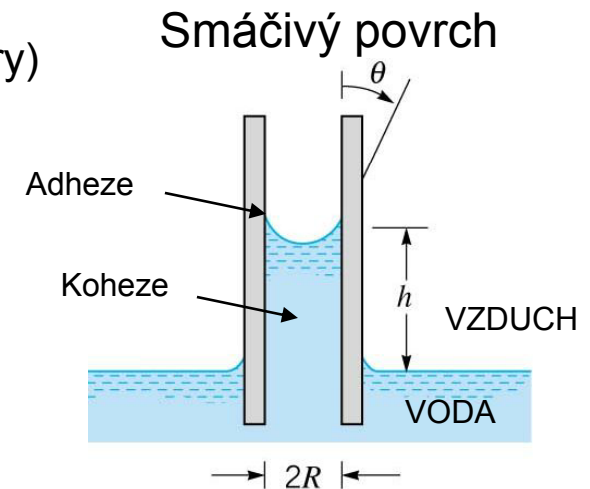


Kapilární jevy

- předpokládáme velmi malý vnitřní průměr trubičky (kapiláry)
- jsou důsledkem povrchového napětí

Adheze > Koheze

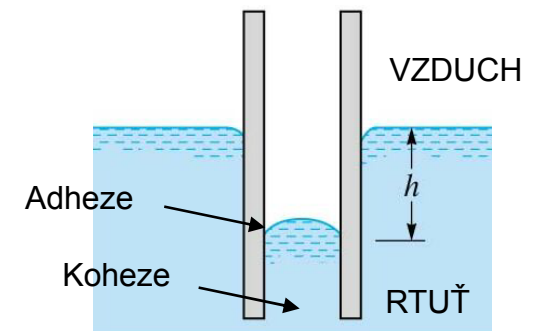
- smáčivý (hydrofilní) povrch
- kapalina vystupuje v kapiláře do výšky h



Koheze > Adheze

- nesmáčivý (hydrofobní) povrch
- kapalina zůstává v kapiláře o výšku h níže než je hladina okolní kapaliny

Nesmáčivý povrch



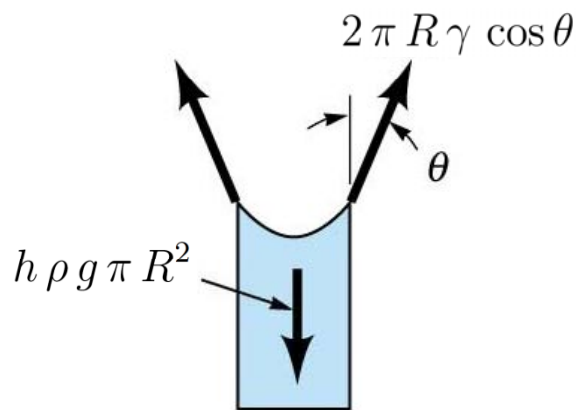
adheze = přilnavost, koheze = soudržnost

Kapilární jevy

- výška kapaliny v kapiláře

definice $\gamma = \frac{F}{\ell} \quad \text{Nm}^{-1}$

Tíha kapaliny je v rovnováze s vertikální silou vytvořenou povrchovým napětím.



$$F_{\text{povrch}} = 2 \pi R \gamma \cos \theta$$

$$F_{\text{hmot}} = p A = h \rho g \pi R^2$$

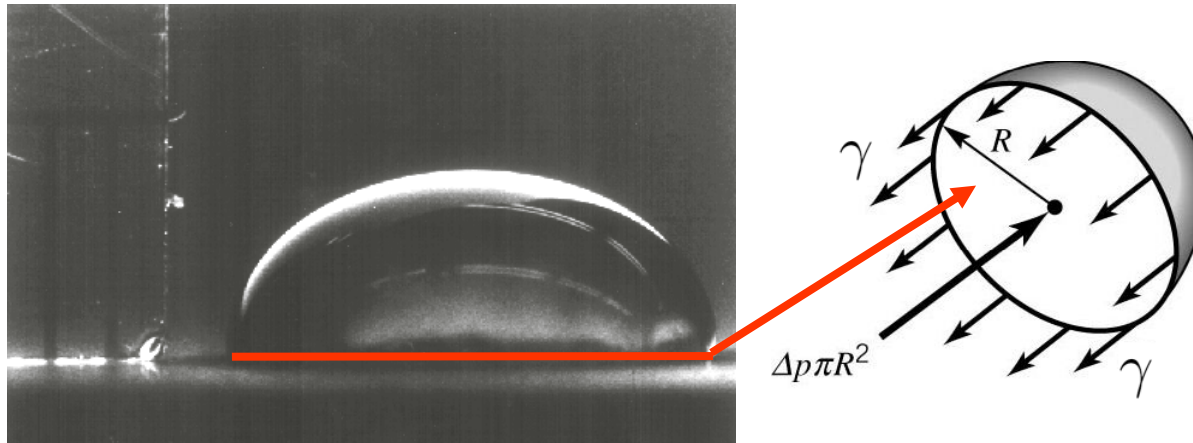
$$h = \frac{2 \gamma \cos \theta}{\rho g R}$$

Kontaktní úhel mezi čistým sklem a vodou je $\theta \approx 0^\circ$, když se poloměr R zmenšuje, výška h roste.

Kontaktní úhel mezi čistým sklem a rtutí je $\theta \approx 130^\circ$, proto je výška h záporná a hladina kapaliny poklesne.

Příklady: tlak uvnitř kapky

- předpokládáme kapku ve tvaru polokoule

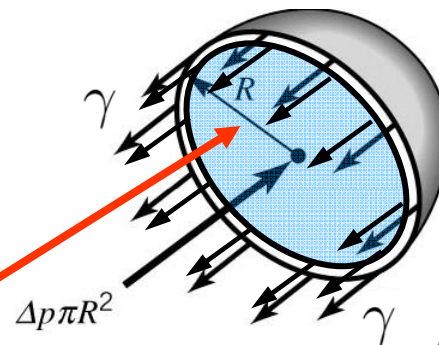


- síly působící na povrch díky povrchovému napětí: $2 \pi R \gamma$
 - výsledná tlaková síla působící na kružnici: $\Delta p \pi R^2$
- } rovnováha sil $2 \pi R \gamma = \Delta p \pi R^2$

Δp = tlaková diference mezi tlakem uvnitř kapky a vnějším tlakem
- tlak uvnitř je větší než vnější tlak

$$\Delta p = \frac{2 \gamma}{R}$$

Příklady: tlak uvnitř bubliny



tenký film má dva povrchy

- síly působící kolem hrany díky povrchovému napětí: $2 (2 \pi R) \gamma$
- výsledná tlaková síla působící na kružnici: $\Delta p \pi R^2$

rovnováha sil: $2 (2 \pi R) \gamma = \Delta p \pi R^2 \quad \Rightarrow$

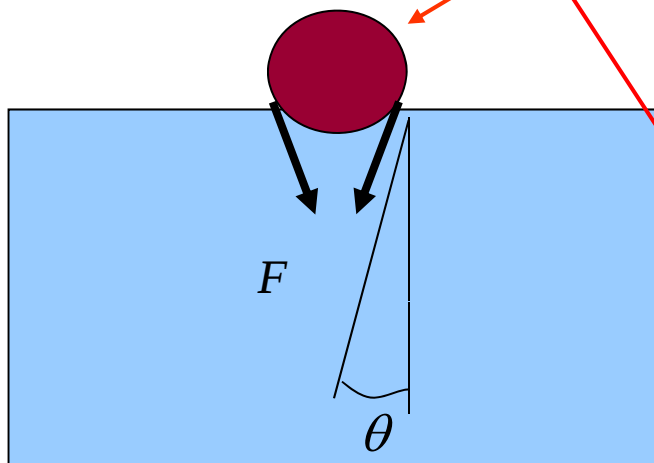
$$\Delta p = \frac{4 \gamma}{R}$$

Δp = tlaková difference mezi tlakem uvnitř bubliny a vnějším tlakem
- tlak uvnitř je větší než vnější tlak

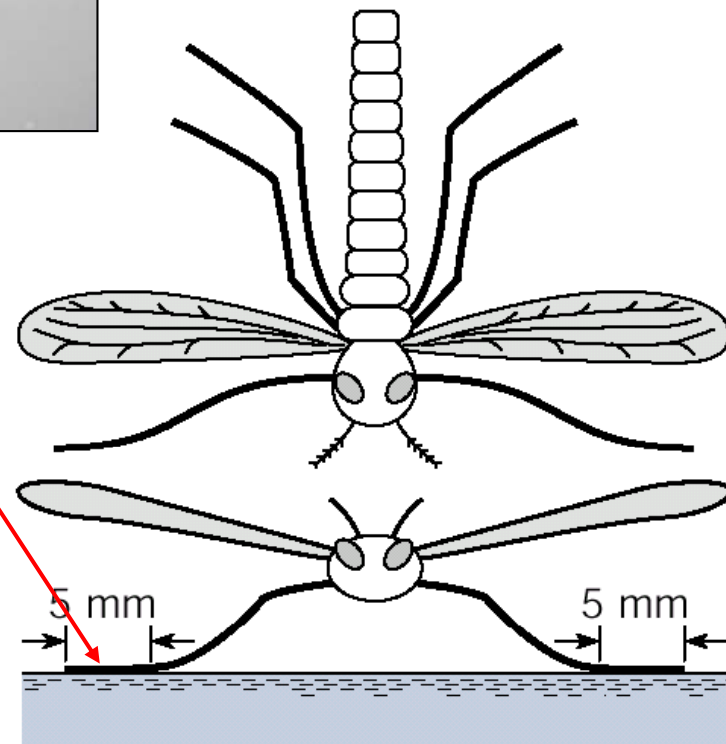
Stavové veličiny (povrchové napětí)

18

Příklady: bruslařka obecná - *Gerris lacustris*

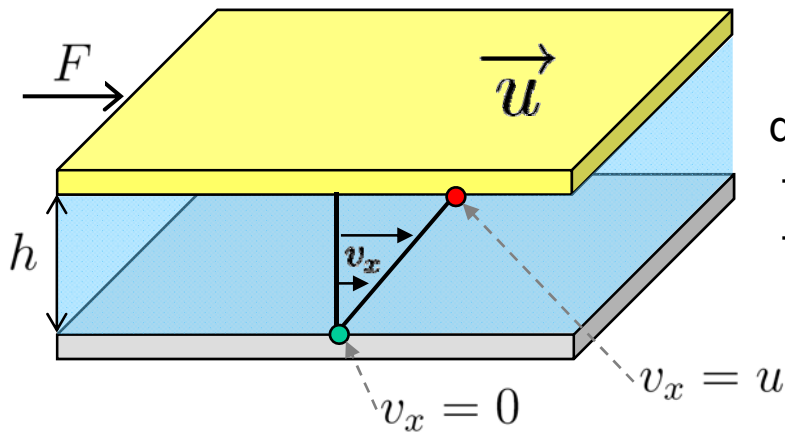


F = povrchové napětí na spodní stranu nohy

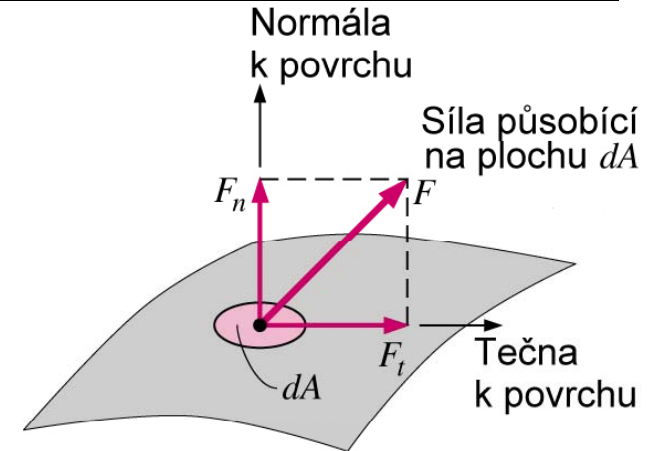


Viskozita

- viskozita tekutin se projevuje při jejich pohybu jako odpor proti vzájemnému pohybu jednotlivých částic tekutiny



dvě rovnoběžné desky
- spodní stojí
- horní se pohybuje rychlostí u



Tečné napětí je úměrné rychlosti u a nepřímo úměrné vzdálenosti mezi deskami h .

$$\tau = \frac{F}{A} = \eta \frac{u}{h}$$

definice
tečného napětí (Pa)

konstanta úměrnosti, dynamická viskozita (Pa s)

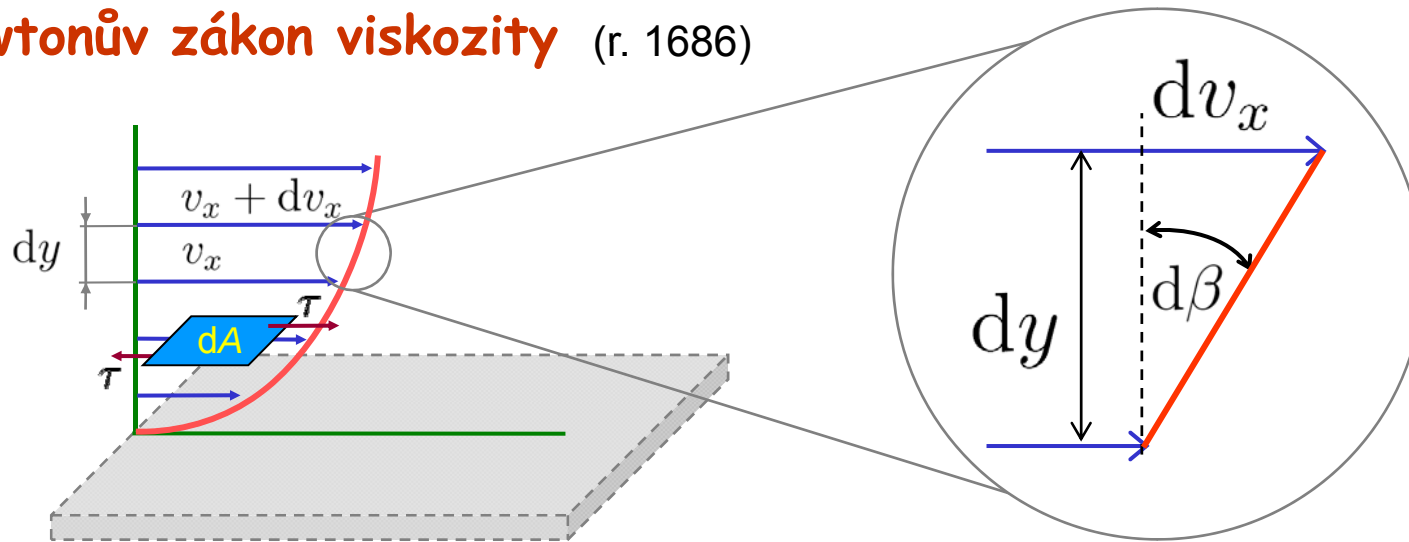
$$\text{Pa s} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{ s} = \frac{\text{kg m s}^{-2}}{\text{m}^2} \text{ s} = \text{kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

kinematická
viskozita

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (\text{m}^2 \text{ s}^{-1})$$

$$1 \text{ poise} = 0,1 \text{ Pa s}, 1 \text{ stokes (St)} = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Newtonův zákon viskozity (r. 1686)



Teorie malých deformací

$$d\beta \approx \tan d\beta = \frac{dv_x dt}{dy}$$
$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{d\beta}{dt} \Rightarrow \tau \propto \frac{d\beta}{dt}$$
$$\Downarrow$$
$$\tau \propto \frac{dv_x}{dy}$$

Newtonske tekutiny jsou tekutiny, jejichž rychlost deformace je přímo úměrná tečnému napětí.

$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

Viskozita (závislostí na T)

Plyny

- s rostoucí teplotou viskozita roste

Tepelný pohyb molekul převládá nad silami mezimolekulárními, se zvýšením teploty vzrůstá rychlost tepelného pohybu molekul a tím roste i viskozita.

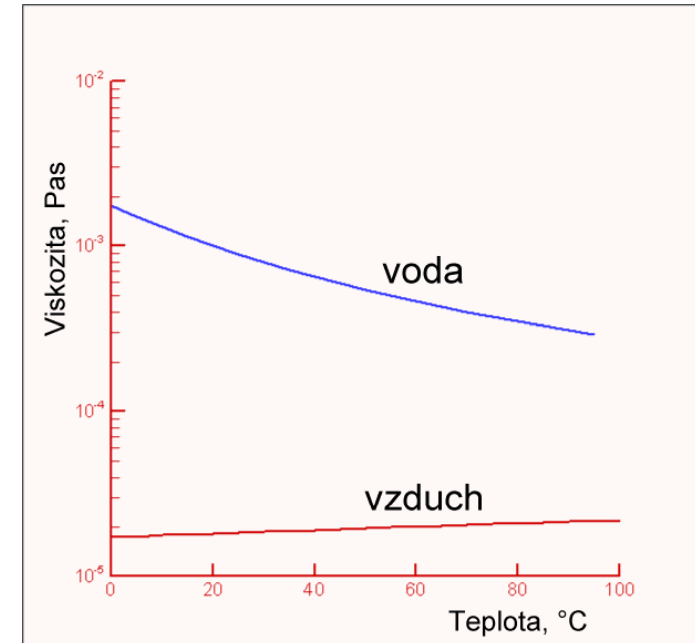
$$\eta = A \frac{T^{3/2}}{B + T} \quad \text{Sutherlandova rovnice}$$

Kapaliny

- s rostoucí teplotou viskozita klesá

Mezimolekulární síly jsou výraznější než tepelný pohyb molekul. Zvýšením teploty dochází k intenzivnější výměně hybností částic v pohybujících se vrstvách kapalin a tečné napětí se zmenšuje.

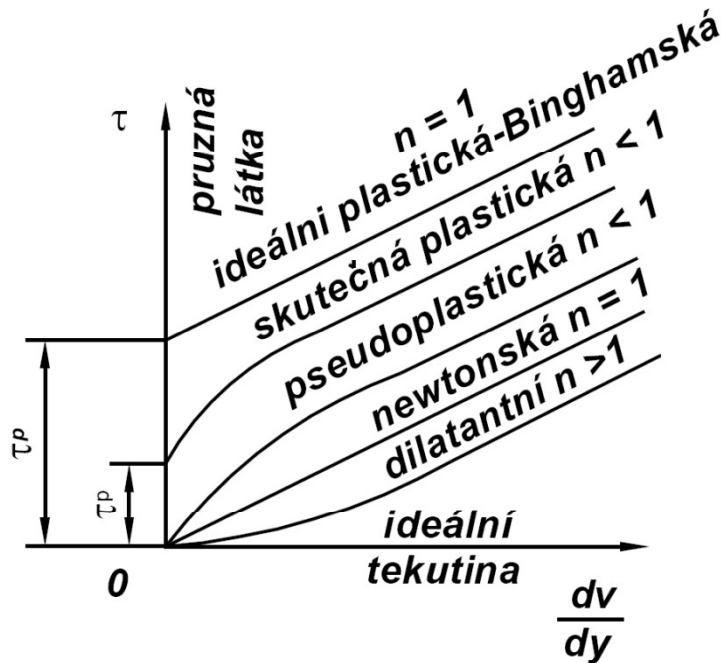
$$\eta = A \exp \left(\frac{B}{T} \right) \quad \text{Andradeho rovnice}$$



A, B – empirické konstanty, T- teplota (K)

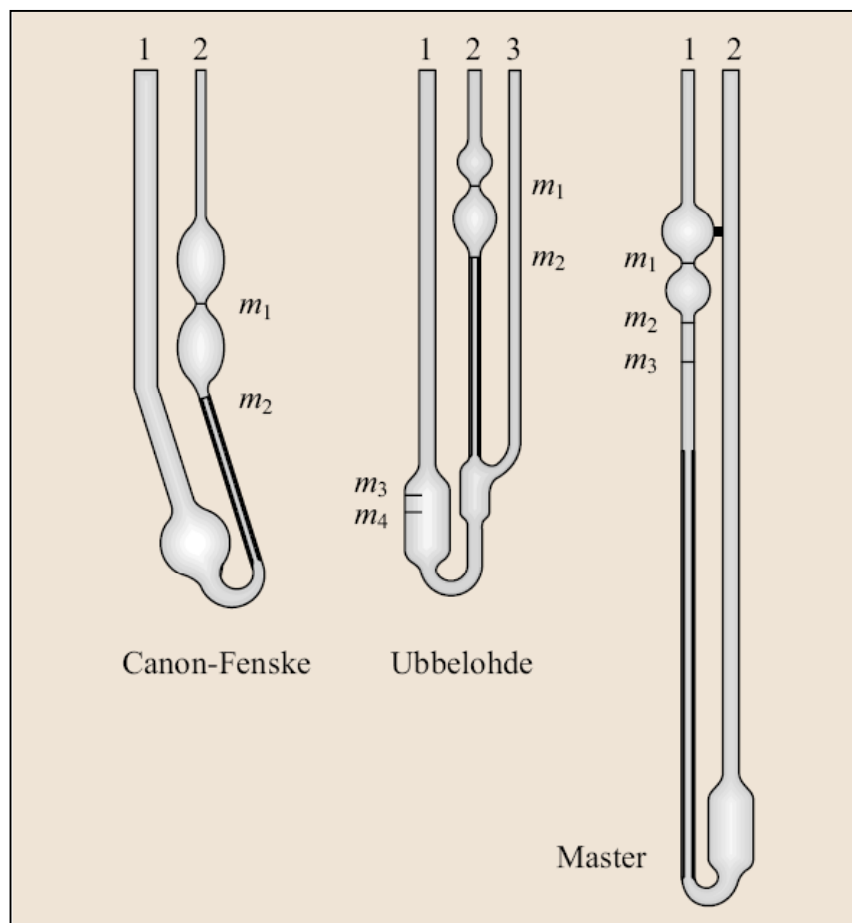
Nenewtonské tekutiny

- viskozita není konstantní, je závislá na tečném napětí, nebo na změně rychlosti ve směru kolmém na směr rychlosti



Měření viskozity – kapilární viskozimetry

– pouze newtonské kapaliny



přesnost: 0,01 – 0,1%

Měření viskozity – kapilární viskozimetry

– pouze newtonské kapaliny

Poiseuillova rovnice

- průtok kapilárou
- laminární proudění

$$\eta = \frac{\pi r^4 \Delta p t}{8 V \ell}$$

Diagram illustrating the variables in the Poiseuille equation:

- r : poloměr kapiláry (radius of the capillary)
- Δp : rozdíl tlaků = hydrostatický tlak (pressure difference = hydrostatic pressure)
- t : čas (time)
- V : objem kapaliny proteklý za čas (volume of liquid that flows in time)
- ℓ : délka kapiláry (length of the capillary)

Relativní měření pomocí referenční kapaliny o známé viskozitě a hustotě

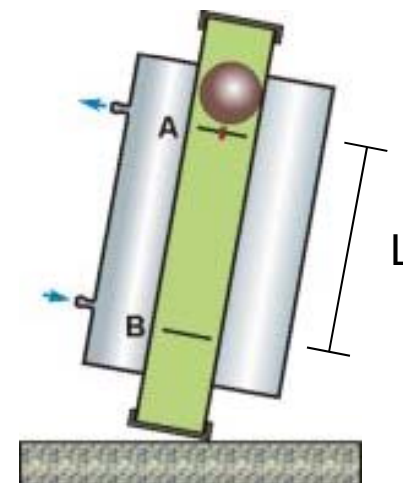
$$\frac{\eta}{\eta_{\text{ref}}} = \frac{t}{t_{\text{ref}}} \frac{\rho}{\rho_{\text{ref}}}$$

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = k t$$

Měření viskozity – metoda padající kuličky – newtonské kapaliny



Höpplerův viskozimetr



$$v = \frac{L}{\tau}$$

Měření viskozity – metoda padající kuličky

– pouze newtonské kapaliny

Stokesův vztah

- pád koule
- laminární proudění

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{r^2 g (\rho_k - \rho)}{v}$$

Diagrammatic labels for the Stokes equation:

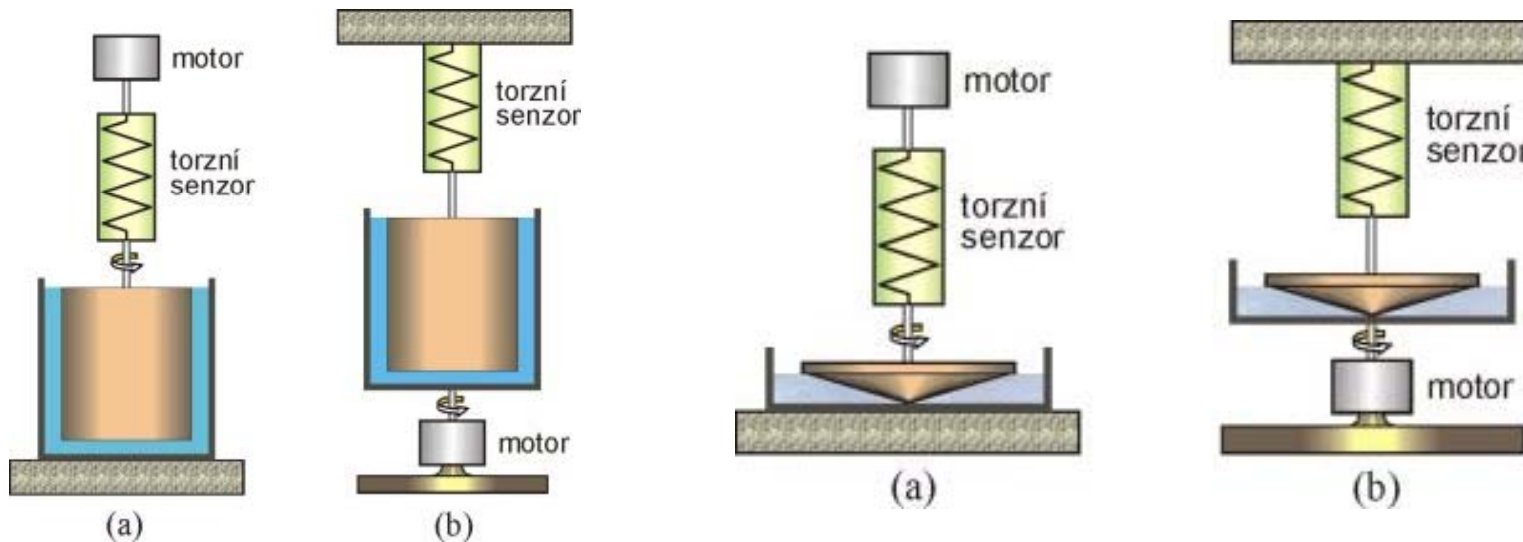
- poloměr kuličky (points to r)
- hustota kuličky (points to ρ_k)
- hustota kapaliny (points to ρ)
- pádová rychlost (points to v)

Relativní měření pomocí referenční kapaliny o známé viskozitě a hustotě

$$\frac{\eta}{\eta_{\text{ref}}} = \frac{v_{\text{ref}}}{v} \frac{(\rho_k - \rho)}{(\rho_k - \rho_{\text{ref}})} = \frac{t}{t_{\text{ref}}} \frac{(\rho_k - \rho)}{(\rho_k - \rho_{\text{ref}})}$$

Měření viskozity - rotační viskozimetry

- založeny na měření torzní síly, kterou působí kapalina na element
- vnější nádoba nebo element se otáčí konstantní rychlostí (konstantní smyková rychlost) a je měřeno smykové napětí pomocí deformace torzní pružiny

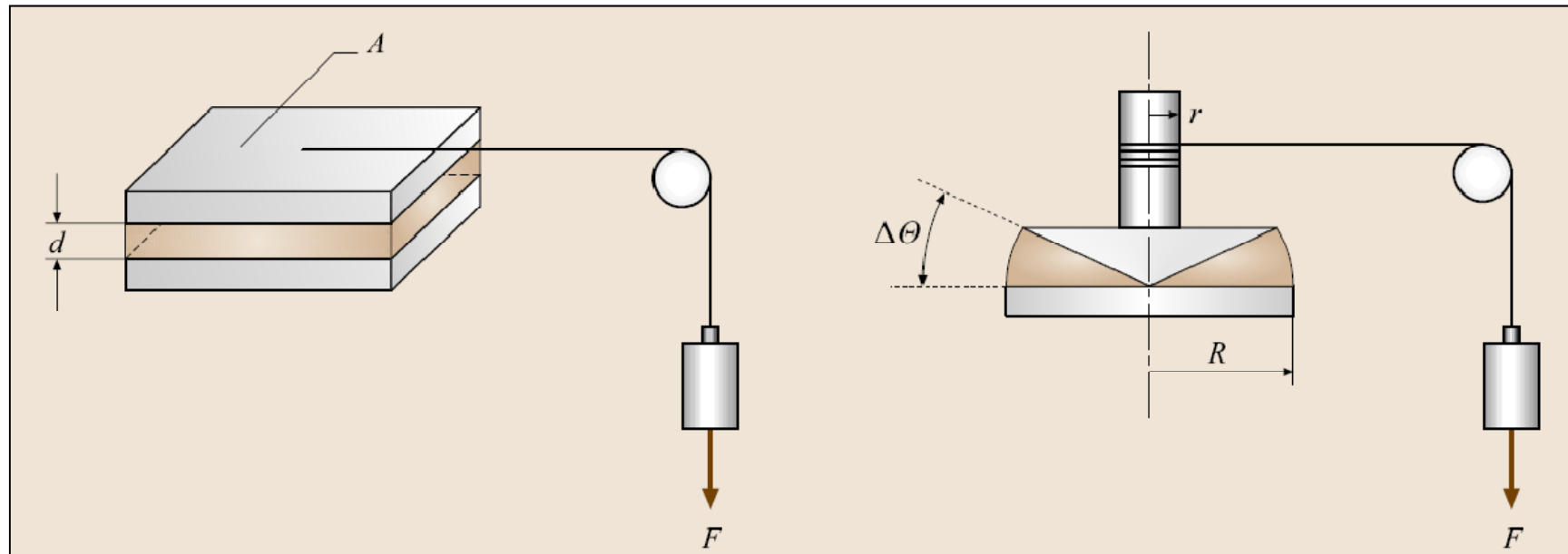


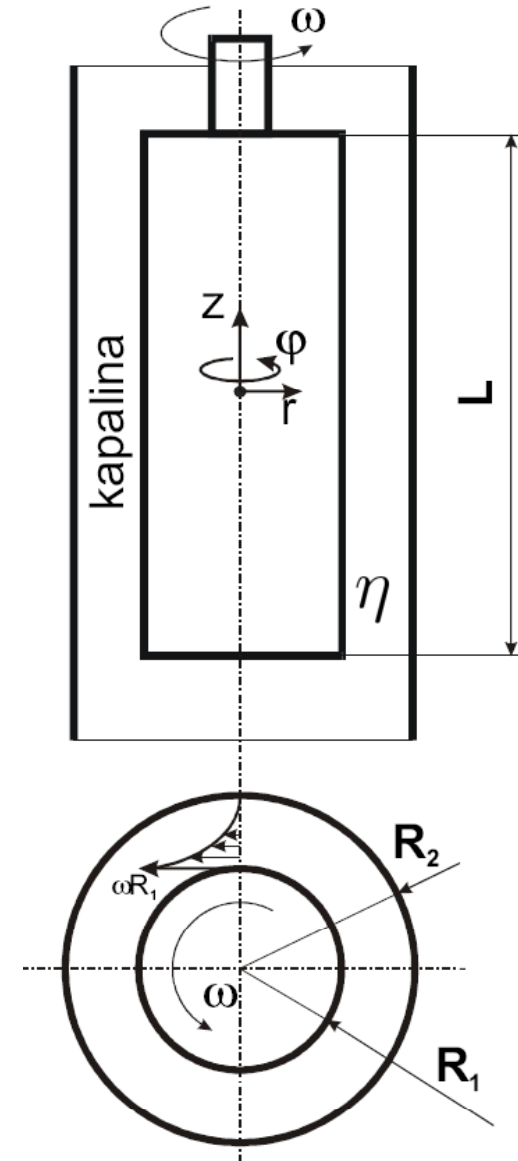
Smykové napětí (Pa) $\tau = F/A$ (shear stress)

Smyková rychlost (s^{-1}) $\gamma = dv/dy$ (shear rate)

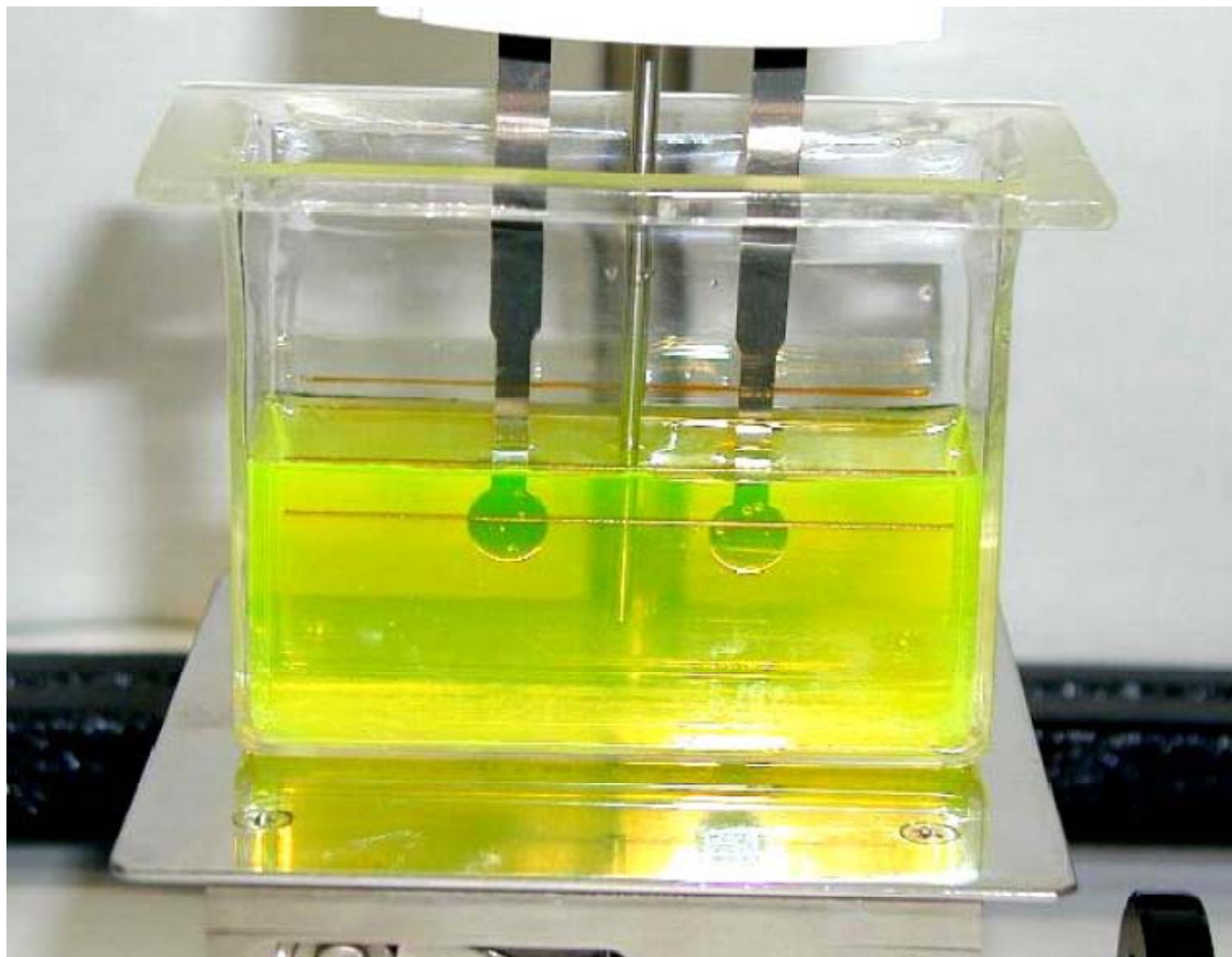
Viskozita (Pa s) $\eta = \tau / \gamma$

Měření viskozity - rotační viskozimetry



$$\eta = \frac{\overset{\text{krouťicí moment}}{M_k} (R_2^2 - R_1^2)}{4\pi\omega R_1^2 R_2^2 L}$$


Měření viskozity - vibrační viskozimetry



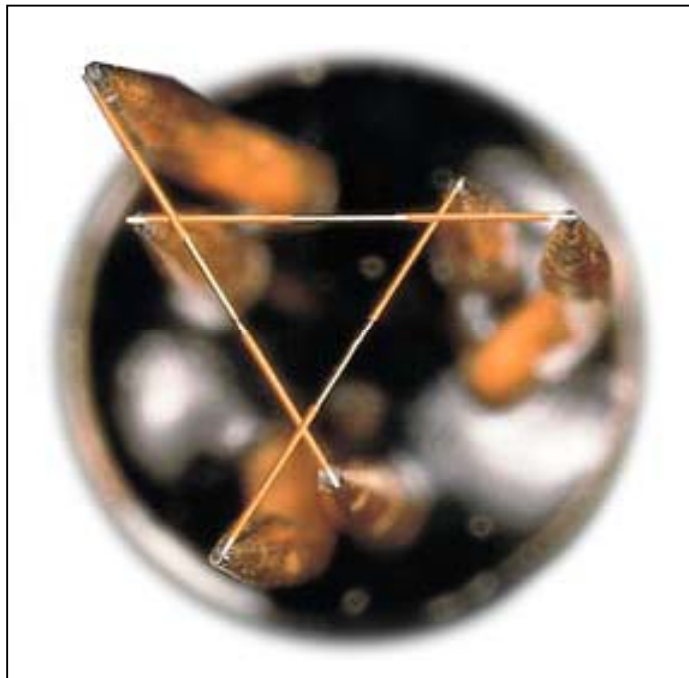
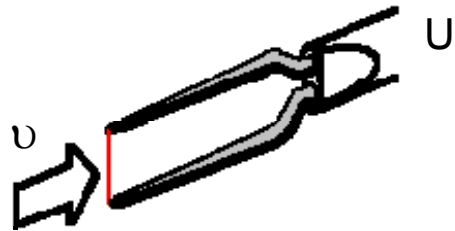
A&D SV-10/SV-100 Viscometer



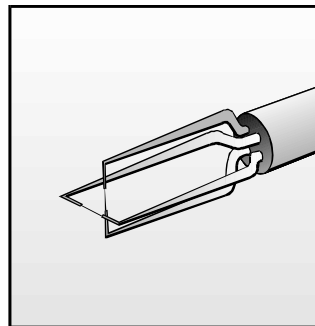
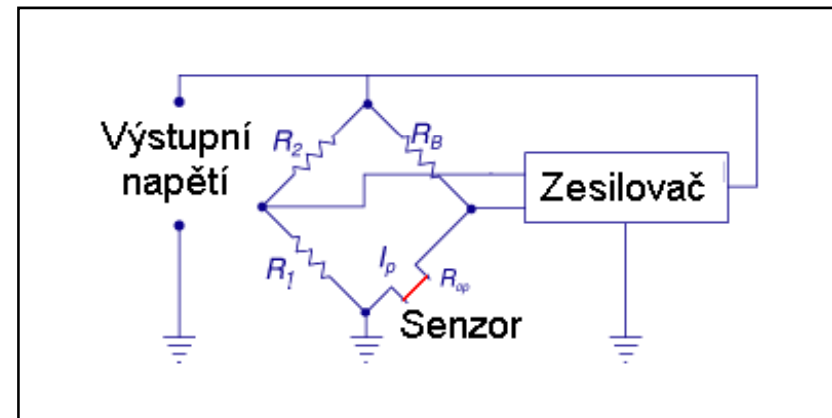
30 Hz
přesnost 1 %

Proudění tekutin – měření rychlosti

Žhavený drát



Protékající tekutina odvádí z elektricky ohřívaného čidla (žhavený drátek nebo fólie) teplo, které je úměrné rychlosti tekutiny.



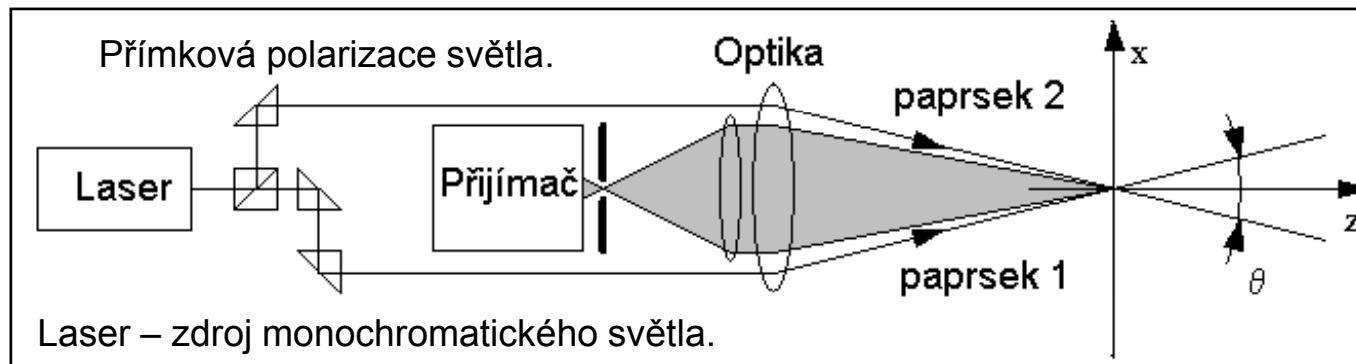
Proudění tekutin – měření rychlosti

LDA, LDV

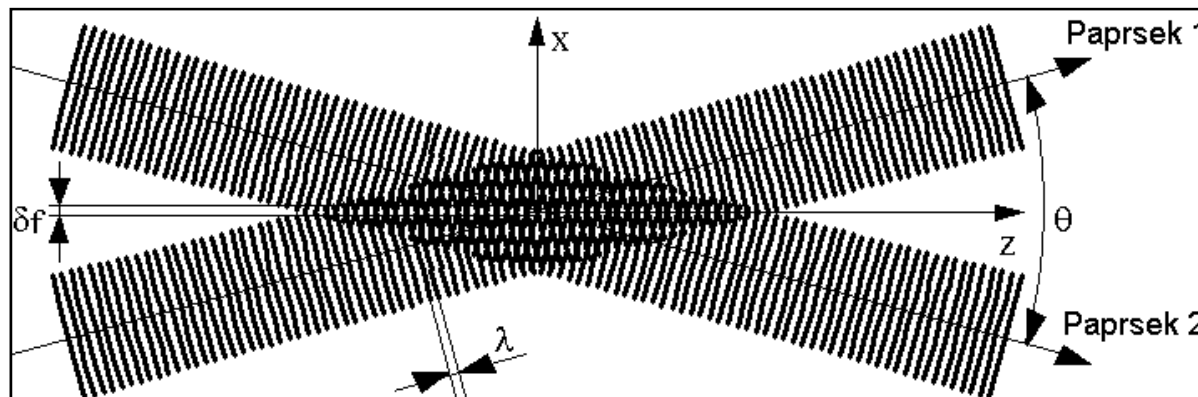
- Laser Doppler Anemometry (Velocimetry)

Anemometry – plyny
Velocimetry - kapaliny

Využití Dopplerova efektu: změna detekované frekvence vlnění při pohybu zdroje vlnění; při přibližování zdroje nastává zvětšení frekvence, při vzdalování zmenšení frekvence vlnění.



$$|v_x| = \frac{\lambda}{2 \sin(\theta/2)} f_D$$



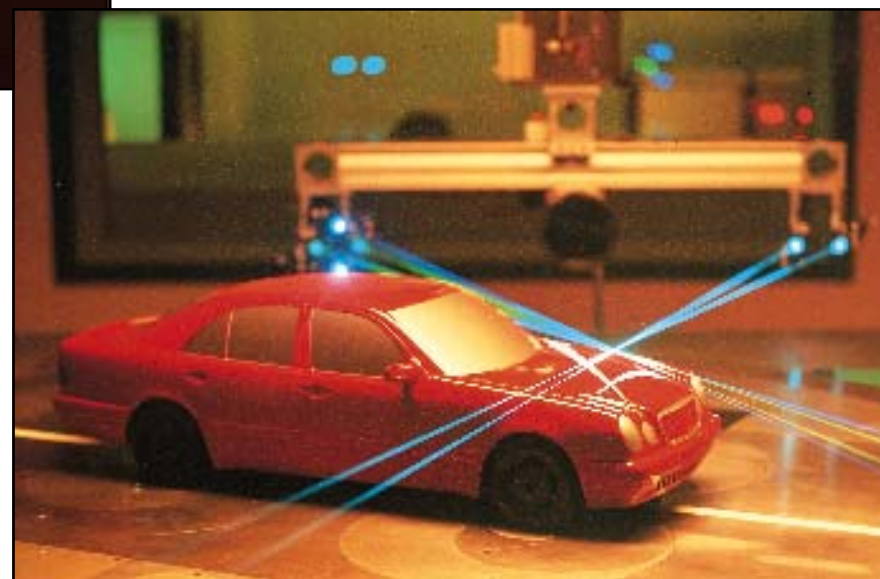
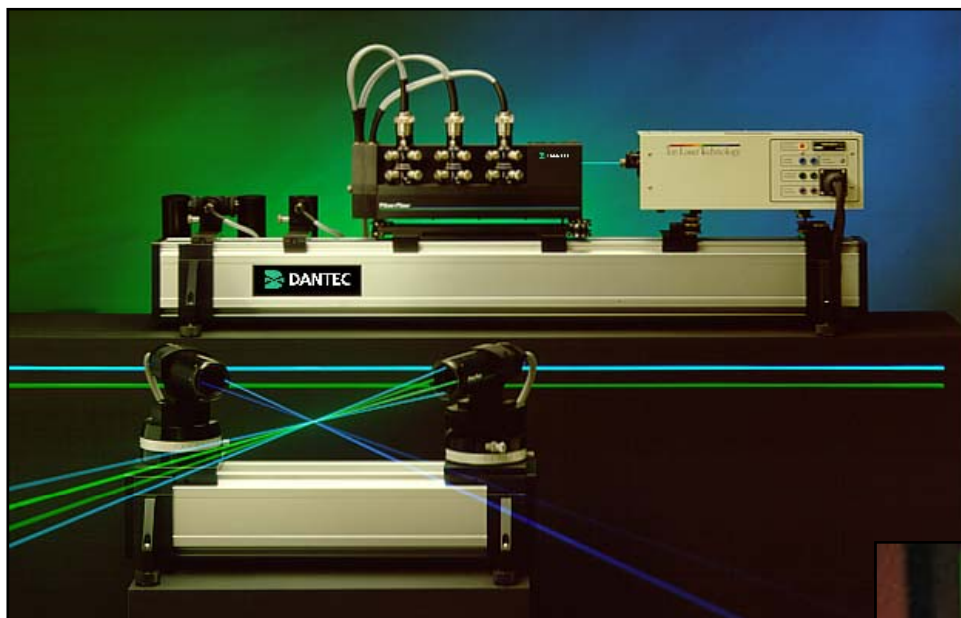
Částice průměru 0,3 μm



- laserový paprsek je rozptylován částicemi měřeného proudícího prostředí
- rozptýlené světlo se vyznačuje frekvenčním posunem vzhledem k dopadajícímu světlu

Proudění tekutin – měření rychlosti

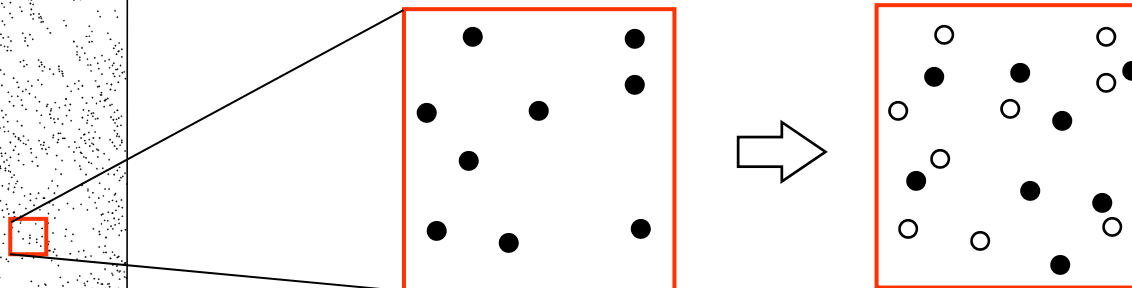
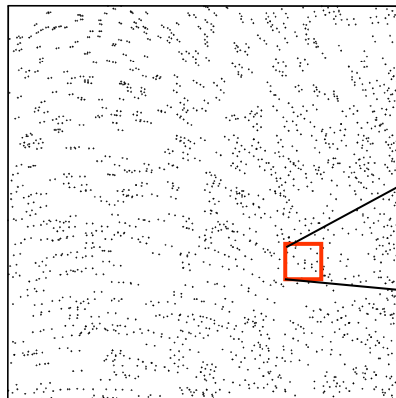
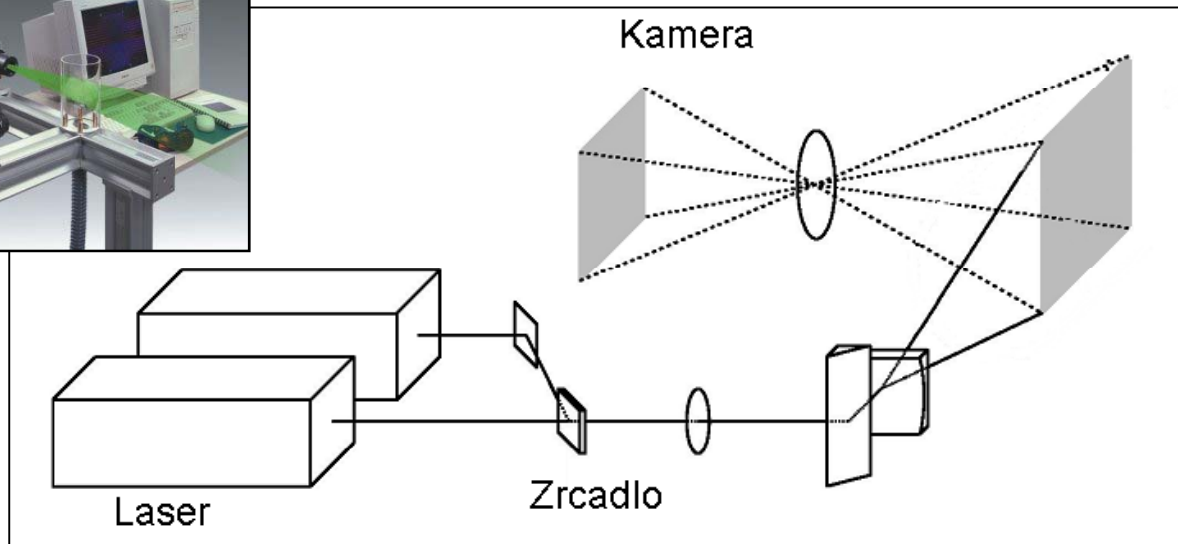
LDA



Proudění tekutin – měření rychlosti

PIV

- Particle Image Velocimetry



- kamerou jsou získány dva snímky rychle za sebou
- jsou vyhledány aktuální pozice částic na každém snímku
- ze známé časové prodlevy mezi snímky a vzdálenosti posunu částic je vypočtena rychlost v daném místě